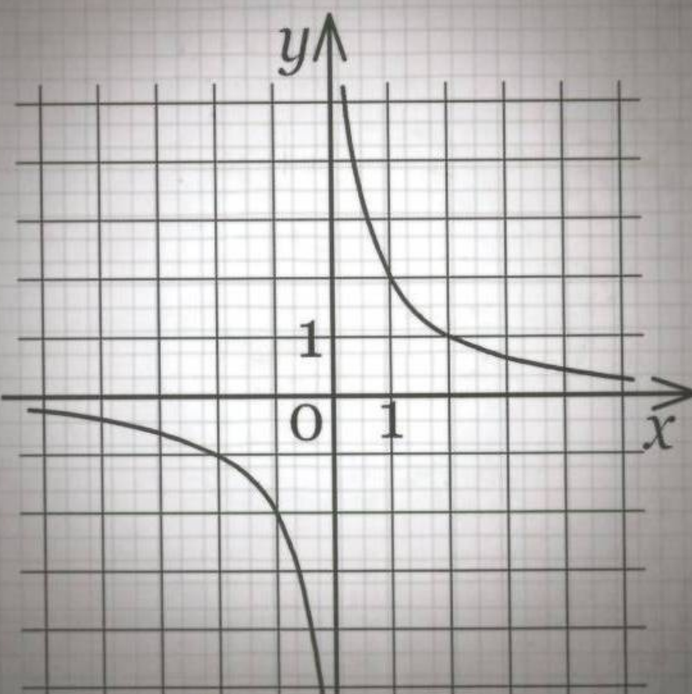
СРЕДНЕЕ МЕДИЦИНСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

М.Г. Гилярова

МАТЕМАТИКА ДЛЯ МЕДИЦИНСКИХ КОЛЛЕДЖЕЙ



Среднее медицинское образование

М. Г. Гилярова

МАТЕМАТИКА

для медицинских колледжей

Составлено в соответствии с ФГОС СПО к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальностям «Лечебное дело», «Акушерское дело», «Сестринское дело», «Лабораторная диагностика», «Стоматология ортопедическая»

Издание четвертое

РОСТОВ-на-ДОНУ
Феникс
2015

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
КТК 11
Г47

Гилярова М. Г.

Г47 Математика для медицинских колледжей. — Изд. 4-е. — Ростов н/Д : Феникс, 2015. — 442, [1] с. — (Среднее медицинское образование).

ISBN 978-5-222-23308-5

В книге рассмотрены основные темы современной математики, необходимые для профессионального обучения медицинских работников среднего звена. Предложены основные теоретические понятия, примеры решения задач, задания для самостоятельной работы. В темах прикладного характера прослеживается профильная направленность изучаемой дисциплины.

Адресована студентам и преподавателям медицинских колледжей.

ISBN 978-5-222-23308-5

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

Содержание

Предисловие

Учебник написан на основе опыта ведения теоретических и практических занятий в медицинском колледже и предназначен для изучения и углубления знаний по математике на учебных занятиях и для организации самостоятельной работы студентов.

Книга представляет собой освещение всех изучаемых разделов математики, направленных на овладение основных понятий и применения математических знаний в работе медицинского персонала среднего звена.

Учебник содержит материал, предусмотренный Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по дисциплине «Математика» для всех специальностей медицинского колледжа, в структуре основной профессиональной образовательной программы место дисциплины в математическом и естественнонаучном цикле.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен уметь решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

В процессе освоения дисциплины обучающийся должен понять:

— значение математики в профессиональной деятельности и при изучении профессиональной образовательной программы;
— основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
— основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики;
— основы интегрального и дифференциального исчисления.

В учебном издании рассматриваются основные понятия следующих разделов математики: алгебра, теория пределов, основы математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление), дискретная математика, логика, теория вероятности, математическая статистика. Кроме этого, в изложении предусмотрена

интеграция со следующими дисциплинами: медицинская статистика, валеология, анатомия, педиатрия, терапия, экономика и управление здравоохранением. Учитывается профессиональная направленность курса математики, что способствует воспитанию у студентов уверенности в профессиональной значимости изучаемого предмета. Решая задачи из области фармакологии, биологии и медицины, студенты убеждаются в справедливости теоретических основ математики и видят их практическое применение.

Для каждого раздела рассматриваемых тем математики дан короткий исторический очерк по используемым понятиям. Этот материал подчеркивает значимость изучаемого материала, создает атмосферу необходимости освоения базового математического багажа знаний. Кроме этого, появляются сознательные мотивы изучения предмета. Мотивация и профильность в современном обучении играют важную роль в успешном усвоении дисциплины. Каждая тема включает в себя перечень изучаемых терминов, основные теоретические понятия, примеры решения задач, задания для самостоятельной работы, контрольные вопросы.

Цель создания книги заключается в том, чтобы помочь студентам расширить, суммировать и систематизировать знания по математике, полученные в средней школе, а также научить их пользоваться ими для совершенствования навыков своей будущей работы.

Для итогового контроля знаний предложены контрольная работа и тестовые задания по вариантам, вопросы для дифференцированного зачета.

Учебник может быть использован как под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения студентами, так как в каждой главе в качестве примеров предложены задачи с решениями и ответами.

Книга поможет студентам в изучении основ высшей математики и будет полезна преподавателям для рассмотрения профильной направленности медицинской математики.

Условные обозначения

$\Leftrightarrow$ — равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда
def — по определению равно
const — постоянная величина
$\varnothing$ — пустое множество
$\{\}$ — множество элементов
$\in / \notin$ — принадлежит / не принадлежит
N — множество всех натуральных чисел
Z — множество всех целых чисел
Q — множество всех рациональных чисел
R — множество всех действительных (вещественных) чисел
R^+ — множество всех положительных действительных чисел
$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$
$E(f)$ — множество (область) значений функции $y = f(x)$
$< / >$ — меньше / больше
$\leqslant / \geqslant$ — меньше либо равно / больше либо равно
$\Rightarrow$ — следует
$\approx$ — приблизительно равно
$\cap$ — пересечение множеств, интервалов
$\cup$ — объединение множеств, интервалов
$\sqrt{}$ — знак корня
∞ — знак бесконечности
$|\ |$ — знак модуля
$|x|$ — абсолютная величина числа
$[x]$ — целая часть числа
$\{x\}$ — дробная часть числа
$\forall$ — для любого значения
$\exists$ — существует

РАЗДЕЛ 1

Основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности

Тема 1.1. Роль и место математики в современном мире. Пропорция. Задачи на проценты

Термины

- Пропорция
- Основное свойство пропорции
- Процент
- Задачи на проценты
- Процентная концентрация раствора
- Концентрация раствора в соотношении
- Единицы длины
- Единицы площади
- Единицы объема
- Единицы веса
- Правила округления чисел
- Абсолютная погрешность
- Относительная погрешность измерения

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Роль и место математики в современном мире

Математическое образование должно составлять неотъемлемую часть культурного багажа любого современного человека. Но оно не должно никоим образом сводиться к рецептурам (будь то таблица умножения или расчет антропометрических индексов).

Основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира. Способность составлять и исследовать математические модели является важнейшей составной частью этого умения.

Начало периода элементарной математики относят к VI–V вв. до н. э. К этому времени был накоплен достаточно большой фактический материал. Понимание математики как самостоятельной науки впервые возникло в Древней Греции. В течение этого периода математические исследования имеют дело лишь с достаточно ограниченным запасом основных понятий, возникших для удовлетворения самых простых запросов хозяйственной жизни. Развивается арифметика — наука о простейших свойствах чисел.

В период развития элементарной математики появляется теория чисел, постепенно выросшая из арифметики. Создается алгебра как буквенное исчисление. Обобщается труд большого числа математиков, занимающихся решением геометрических задач, в стройную и строгую систему элементарной геометрии — геометрию Евклида (300 лет до н.э.), изложенную в его знаменитом труде «Начала», включающем 15 книг.

В XVII в. запросы естествознания и техники привели к созданию методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразование геометрических фигур. С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создания дифференциального и интегрального исчисления начинается период математики переменных величин. Великим открытием XVII в. является введенное И. Ньютоном (1643–1727) и Г. Лейбницем (1646–1716) понятие бесконечно малой величины, создание основ анализа бесконечно малых (математического анализа).

На первый план выдвигается понятие функции. Функция становится основным предметом изучения. Изучение функции приводит к основным понятиям математического анализа: пределу, производной, дифференциалу, интегралу.

К этому времени относится и появление гениальной идеи Р. Декарта (1596–1650) о методе координат. С одной стороны, создается аналитическая геометрия, которая позволяет изучать геометрические объекты методами алгебры и анализа. С другой стороны, метод координат открыл возможность геометрической интерпретации алгебраических и аналитических фактов.

Дальнейшее развитие математики в начале XIX в. привело к постановке задачи изучения возможных типов количественных отношений и пространственных форм с достаточно общей точки зрения.

Связь математики и естествознания приобретает все более сложные формы. Новые теории возникают не только в результате запросов естествознания и техники, но и вследствие внутренней потребности математики. Замечательным примером такой теории является воображаемая геометрия Н.И. Лобачевского (1792–1856). Иследования математиков в XIX и XX вв. позволяют отнести ее к периоду современной математики. Развитие самой математики, математизация различных областей науки, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, прогресс вычислительной техники привели к появлению новых математических дисциплин, например: исследование операций, теория игр, математическая экономика и др.

Построение математической теории базируется на аксиоматическом методе. В основу научной теории положены некоторые исходные положения, называемые аксиомами, а все остальные положения теории получаются как логические следствия аксиом.

Основными методами в математических исследованиях являются математические доказательства — строгие логические рассуждения. Математическое мышление не сводится лишь к логическим рассуждениям. Для правильной постановки задачи, для оценки выбора способа ее решения необходима математическая интуиция.

В математике изучаются математические модели объектов. Одна и та же математическая модель может описывать свойства далеких друг от друга реальных явлений. Так, одно и то же дифференциальное уравнение может описывать процессы роста населения и распад радиоактивного вещества. Для математики важна не природа рассматриваемых объектов, а существующие между ними отношения.

Целью изучения математики является повышение общего кругозора, культуры мышления, формирование научного мировоззрения.

Математика — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Академик Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) выделяет четыре периода развития математики:

- зарождение математики;
- элементарная математика;
- математика переменных величин;
- современная математика.

В наше время ни одна наука и ни один предмет не обходятся без математики в любом ее выражении. Особенно тесно математика связана с все более нарастающим прогрессом и всеобщей компьютеризацией.

В любой современной области науки математические вычисления играют главенствующую роль, причем расчеты все время усложняются в геометрической прогрессии. А что касается медицины, то здесь с наступлением новых технологий и точных расчетов эффективность лечения будет равна практически 100 процентам. Все больше новые методы лечения, даже некоторые новые лекарства, а также некоторые медицинские эксперименты моделируются и разрабатываются с помощью той же математики и компьютеров.

В математике используются три вида умозаключений: дедукция, индукция и по аналогии.

Индукция — метод исследования, в котором общий вывод строится на основе частных рассуждений.

Дедукция — способ рассуждения, посредством которого от общих высказываний (фактов) следует заключение частного характера.

Аналогичные рассуждения чаще всего используются учащимися при решении задач.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Причина проникновения математики в

различные отрасли знаний заключается в том, что она предлагает весьма четкие модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. В современном мире все образованные люди используют в жизни знания математики, полученные в школе, вузе, других учебных заведениях. Все умеют считать, этому нас научила арифметика. Все умеют выполнять измерения линейкой и циркулем, этому нас учит геометрия. Кроме этого мы постоянно в течение нашей жизни решаем задачи, например, на нахождение процентов, вычисление наибольшего и наименьшего значения, просчитываем число вариантов, определяем вероятность того или иного события, анализируем ситуации, используем алгоритмы выполнения чего-либо. Этому всему нас учат различные разделы математики. Но в силу своей образованности человек не отдает себе отчета в том, что это элементы математики, он решает простейшие задачи автоматически.

В настоящее время математика вплотную используется в основном для следующих целей:

— изучение базовых и специальных разделов математики во всех учебных заведениях: школах, училищах, колледжах, вузах и т. д.;

— использование математической составляющей, связанной с работой на ЭВМ (работа в вычислительных центрах);

— применение математических задач, решаемых в научно-исследовательских и научно-практических организациях (НИИ, КБ и т.д.);

— поиск новых решений математических задач, проведение исследований в различных разделах математики (научная работа).

Для тех, кто напрямую не связан с математикой, существует необходимость пополнять и расширять запас математических знаний. У студентов и учащихся должно быть сформировано представление о математике как о теоретической базе, необходимой для применения во всех сферах общечеловеческой жизни.

При изучении математики в системе среднего профессионального образования следует опираться не только на образовательные цели обучения, но и на развивающие и воспитательные. Обучение математике должно решать следующие задачи:

— формировать устойчивый интерес к математике;
— развивать вычислительные навыки и математические способности;
— способствовать созданию более осознанных мотивов изучения математики;
— расширять представления студентов и учащихся о сферах применения математики в естественных науках, в области гуманитарной деятельности, искусстве, производстве, быту;
— формировать представление о математике как о части общечеловеческой культуры;
— способствовать пониманию значимости математики для общественного прогресса;
— расширять сферу применения математических знаний и способов выполнения математических преобразований учащихся и студентов;
— формировать представления об объективности математических отношений, проявляющихся во всех сферах деятельности человека, как форм отражения реальной действительности;
— готовить обучаемых к профильному направлению, ориентировать на будущую профессию;
— развивать логическое и пространственное мышление;
— формировать навыки перевода прикладных задач на язык математики и умения создавать математические модели для ситуационных задач и т.д.

При проведении занятий по математике на любом уровне обучения следует учитывать межпредметные и внутрипредметные связи. Опора делается на школьную математику и предметы, как изучаемые в школе: физика, химия, биология, так и не изучаемые в основной

школе: экономика, биохимия, управление здравоохранением и т.д.

Очень важен компетентностный подход для каждой конкретной специальности: студент должен четко представлять свои умения и навыки для использования в будущей профессии. Обычно компетентность представлена тремя составляющими: знания, умения, навыки. Для студентов медицинского колледжа, будущих работников здравоохранения среднего звена, можно определить следующие общие цели:

— умение выполнять различные вычисления, устно, на бумаге, с помощью калькулятора или на компьютере;
— составление и заполнение различных таблиц, т. е. совершенствование умения структурировать числовую информацию;
— построение и умение читать различные графики и диаграммы.

Для достижения поставленных целей преподаватель показывает комплексный подход в использовании математических закономерностей в различных отраслях современного производства. Например, для успешной работы с машиностроительной техникой необходимым является умение читать чертежи и схемы, использовать формулы геометрии и тригонометрии, определять условия экономического использования различного сырья и материалов и т.д. Для каждой специальности существует свое профильное направление математики. А для студентов-медиков необходимо умение безошибочно вычислять всевозможные показатели, ориентироваться в графическом представлении информации (строить графики различных функций), а также обрабатывать статистические данные.

Как известно, каждый человек использует математические знания в быту и применяет их при решении практических задач. Вычисление необходимых отношений и величин для домашнего строительства, кулинарии, экономического ведения хозяйства, выбор параметров, характеристик объектов, самостоятельные измерения, вычисления величин, выполнение приближенных вычислений, умение пользоваться таблицами и справочниками в домашней практике, вычисление процентов, расходов и доходов — все это связано с математикой и применением математических знаний в домашней практике.

Говоря о необходимости математических знаний, следует опираться на их практическое применение в конкретных специальностях.

Математическое образование — это испытанное столетиями средство интеллектуального развития в условиях массового обучения. Такое развитие обеспечивается принятым в качественном математическом образовании систематическим, дедуктивным изложением теории в сочетании с решением хорошо подобранных задач. Успешное изучение математики облегчает и улучшает изучение других учебных дисциплин.

Математика — наиболее точная из наук. Поэтому учебный предмет «математика» обладает исключительным воспитательным потенциалом: он воспитывает интеллектуальную корректность, критичность мышления, способность различать обоснованные и необоснованные суждения, приучает к продолжительной умственной деятельности.

Для многих обучающихся математика является необходимым элементом предпрофессиональной подготовки. В связи с этим принципиально важно согласование математики и других учебных предметов.

Изучение математики является неотъемлемой частью любой специальности среднего звена, в том числе и будущих медицинских работников, и на каждом занятии должна прослеживаться связь с практикой.

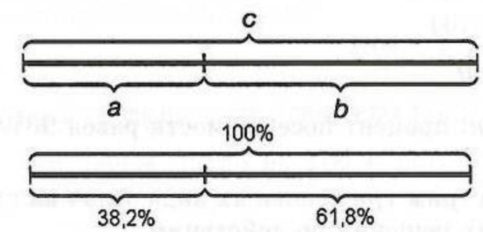
Пропорция и золотое сечение

В математике пропорцией (от лат. *proportio*) называют равенство двух отношений: $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Основное свойство пропорции: произведение крайних элементов пропорции равно произведению ее средних элементов.

С древних времен известна гармоническая пропорция — золотое сечение.

Золотое сечение — это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему $a : b = b : c$ или $c : b = b : a$.



Принцип золотого сечения – высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе.

Если отрезок принять за 100 частей, то большая часть отрезка равна 62, а меньшая — 38 частям. Второе золотое сечение вытекает из основного сечения и дает другое отношение 44 : 56. Такая пропорция используется в архитектуре, а также имеет место при построении композиций изображений удлиненного горизонтального формата.

Процент

Само слово «процент» происходит от лат. «*pro centum*», что означает в переводе «сотая доля». В 1685 году в Париже была издана книга «Руководство по коммерческой арифметике» Матье де ла Порта. В одном месте речь шла о процентах, которые тогда обозначали «*cto*» (сокращенно от *cento*). Однако наборщик принял это «*cto*» за дробь и напечатал «%». Так из-за опечатки этот знак вошел в обиход.

Задачи на проценты можно решать разными способами: составляя пропорцию; по действиям; обозначив неизвестное за x, составляя и решая уравнение; используя логические рассуждения. Далее приведен пример решения задачи с помощью пропорции.

Из 50 студентов пятеро не пришли на занятия. Определите процент посещаемости.

Решение:

Составим пропорцию:

50 ст. – 100%

45 ст. – x%

$$x = \frac{45 \cdot 100}{50} = 90\%.$$

Ответ: процент посещаемости равен 90%.

Рассмотрим три основных вида задач на проценты и способы их решения по действиям.

1) Найти число по указанному проценту.

Данное число делится на 100, и полученный результат умножается на число процентов.

Пример.

В отделении за сутки в среднем расходуется 0,5 кг хлорной извести. Во время генеральной уборки помещений было израсходовано 150% среднесуточного количества хлорной извести. Сколько хлорной извести израсходовал персонал отделения во время генеральной уборки помещения?

Решение:

1) 0,5 кг : 100% = 0,005 кг – в 1%.

2) 0,005 · 150% = 0,75 кг.

Ответ: за сутки во время генеральной уборки израсходовано 0,75 кг хлорной извести.

2) Найти число по данной величине указанного его процента.

Данная величина делится на число процентов, и результат умножается на 100.

Пример.

Вес хлорной извести в растворе составляет 10%. Сколько потребуется воды для разведения раствора, если известно, что хлорной извести взяли 0,5 кг?

Решение:

1) 0,5 : 10 = 0,05 кг в 1%.

2) 0,05 · 100 = 5 л.

Ответ: потребуется 5 л воды.

3) Найти выражение одного числа в процентах другого.

Умножаем первое число на 100 и результат делим на второе число.

Пример.

За сутки в отделении израсходовано 765 г хлорной извести вместо среднесуточной нормы расхода 500 г. На сколько процентов больше израсходовано хлорной извести?

Решение:

1) 765 – 500 = 265 г.

2) 265 · 100 = 26500.

3) 26500 : 500 = 53%.

Ответ: на 53% больше израсходовано хлорной извести за сутки.

Правила округления чисел. Погрешность

При округлении чисел используется следующее универсальное правило из двух пунктов:

1) лишние цифры округляемого числа отбрасываются, причем, если они после запятой, то просто убираются, а если находятся в целой части числа, то заменяются нулями;

2) если первая отбрасываемая цифра 5 или больше, то она увеличивается на 1, а если нет, то остается без изменения.

Например, округлим число 0,9582 до тысячных, до сотых, до десятых и до целых.

$0{,}9582 \approx 0{,}958 \approx 0{,}96 \approx 1{,}0 \approx 1$.

Округление чисел используется при стандартной записи числа, общий вид такой записи

$a \cdot 10n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число.

Например, число 486 000 000 запишется в стандартном виде как $4{,}86 \cdot 108$,

а число $0{,}000\,000\,000\,012\,3 = 1{,}2 \cdot 10^{-11}$.

Абсолютная погрешность — ΔX является оценкой абсолютной ошибки измерения. Величина этой погрешности зависит от способа ее вычисления, который, в свою очередь, определяется распределением случайной величины X_{meas}. При этом равенство: $\Delta X = |X_{true} - X_{meas}|$, где X_{true} — истинное значение, а X_{meas} — измеренное значение, должно выполняться с некоторой вероятностью, близкой к 1. Абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах измерения, что и сама величина.

Относительная погрешность — отношение абсолютной погрешности к тому значению, которое принимается за истинное: $\delta_x = \dfrac{\Delta X}{X}$.

Относительная погрешность является безразмерной величиной либо измеряется в процентах.

ЕДИНИЦЫ ДЛИНЫ

Единица измерения	Сокр. обозн.	Нанометр	Микрометр	Миллиметр	Сантиметр	Дюйм	Фут	Метр	Ярд	Километр
Нанометр	нм	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-7}	$3{,}937 \cdot 10^{-8}$	$3{,}281 \cdot 10^{-9}$	10^{-9}	$1{,}094 \cdot 10^{-9}$	10^{-12}
Микрометр (микрон)	мкм	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-4}	$3{,}937 \cdot 10^{-5}$	$3{,}281 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}	$1{,}094 \cdot 10^{-6}$	10^{-9}
Миллиметр	мм	10^{6}	10^{3}	1	10^{-1}	$3{,}937 \cdot 10^{-2}$	$3{,}281 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$1{,}094 \cdot 10^{-3}$	10^{-6}
Сантиметр	см	10^{7}	10^{4}	10	1	0,3937	$3{,}281 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	$1{,}094 \cdot 10^{-2}$	10^{-5}
Дюйм	Дюйм (´´)	$2{,}540 \cdot 10^{7}$	$2{,}540 \cdot 10^{4}$	25,4	2,54	1	$8{,}333 \cdot 10^{-2}$	$2{,}540 \cdot 10^{-2}$	$2{,}778 \cdot 10^{-2}$	$2{,}54 \cdot 10^{-5}$
Фут	фут	$3{,}048 \cdot 10^{8}$	$3{,}048 \cdot 10^{5}$	$3{,}048 \cdot 10^{2}$	30,48	12	1	0,3048	0,3333	$3{,}048 \cdot 10^{-4}$
Метр	м	10	10^{6}	10^{3}	10^{2}	39,37	3,2808	1	1,0936	10^{-3}
Ярд	ярд	$9{,}144 \cdot 10^{8}$	$9{,}144 \cdot 10^{5}$	$9{,}144 \cdot 10^{2}$	91,44	36	3	0,944	1	$9{,}144 \cdot 10^{-4}$
Километр	км	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	$3{,}937 \cdot 10^{4}$	$3{,}281 \cdot 10^{3}$	10^{3}	$1{,}094 \cdot 10^{3}$	1

ЕДИНИЦЫ ПЛОЩАДИ

Единица измерения	Сокращенное обозначение	Квадратный километр	Гектар	Ар (сотка)	Квадратный метр	Квадратный дециметр	Квадратный сантиметр	Квадратный миллиметр
Квадратный километр	$км^2$	1	100	10 000	10^{6}	10^{8}	10^{10}	10^{12}
Гектар	га	0,01	1	100	10 000	10^{6}	10^{8}	10^{10}
Ар (сотка)	ар	0,0001	0,01	1	100	10 000	10^{6}	10^{8}
Квадратный метр	$м^2$	0,000001	0,0001	0,01	1	100	10 000	10^{6}
Квадратный дециметр	$дм^2$	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	0,01	1	100	10 000
Квадратный сантиметр	$см^2$	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	0,01	1	100
Квадратный миллиметр	$мм^2$	10^{-12}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	0,01	1

ЕДИНИЦЫ ВЕСА

Единица измерения	Сокр. обозн.	Тонна	Кило-грамм	Центнер	Пуд	Грамм	Милли-грамм	Микро-грамм	Фунт	Унция	Карат
Тонна	т	1	1000	10	62,5	10^6	10^9	10^{12}	2679	32150	$5 \cdot 10^6$
Килограмм	кг	0,001	1	0,01	0,0625	1000	10^6	10^9	2,679	32,15	5000
Центнер	ц	0,1	100	1	6,25	10^5	10^8	10^{11}	267,9	3215	$5 \cdot 10^5$
Пуд	пуд	0,016	16	0,16	1	16 000	$1,6 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^{10}$	43,89	526,6	80 000
Грамм	гр	10^{-6}	0,001	0,00001	0,0000625	1	1000	1000 000	0,002679	0,03215	5
Миллиграмм	мгр	10^{-9}	10^{-6}	10^{-8}	$6,25 \cdot 10^{-8}$	0,001	1	1000	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	0,005
Микрограмм	мкг	10^{-12}	10^{-9}	10^{-11}	$6,25 \cdot 10^{-11}$	10^6	0,001	1	$2,4 \cdot 10^{-9}$	$3,2 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-6}$
Фунт	фунт	0,0003732	0,3732	0,003732	0,02279	373,2	37 320	373 200 000	1	12	1 866
Унция	унция	0,0000311	0,0311	0,000311	0,001899	31,1	3110	31 100 000	0,08333	1	155,5
Карат	карат	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00001221	0,2	200	$2 \cdot 10^5$	0,0005358	0,00643	1

ЕДИНИЦЫ ОБЪЕМА

Единицы измерения	Сокращенное обозначение	Кубический сантиметр	Кубический дециметр, литр	Кубический метр	Кубический дюйм	Галлон (США)
Кубический сантиметр	см³	1	0,001	$1 \cdot 10^{-6}$	0,0610	$0,26 \cdot 10^{-3}$
Кубический дециметр, литр	дм³	1000	1	$1 \cdot 10^{-3}$	61,024	0,2642
Кубический метр	м³	1 000 000	1000	1	61024	264,2
Кубический дюйм	куб. дюйм	16,4	$16,4 \cdot 10^{-3}$	$16,4 \cdot 10^{-6}$	1	$4,33 \cdot 10^{-3}$
Галлон (США)	галл	3 785	3,785	$3,79 \cdot 10^{-3}$	231	1

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ 1. Определите, верно ли составлена пропорция?

а) $4^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{4}} = 36 : 26;$

б) $3 : 7,5 = 2^{\frac{1}{2}} : 6^{\frac{1}{4}};$

в) $\dfrac{0,35}{0,6} = \dfrac{0,105}{0,18};$

г) $\dfrac{18}{3} = \dfrac{30}{6};$

д) $\dfrac{15}{1,8} = \dfrac{2,7}{0,09}.$

Ответ: *а)* да; *б)* да; *в)* да; *г)* нет; *д)* нет.

№ 2. Решите пропорцию:

а) $x : 51,6 = 11,2 : 34,4;$

б) $\dfrac{67,8}{x} = \dfrac{7,62}{6,35};$

в) $x : \dfrac{25}{6} = \dfrac{4}{7} : \dfrac{20}{21}.$

Ответ: *а)* 16,8; *б)* 56,5; *в)* 2,5.

№ 3. Из данной пропорции составьте три новые пропорции:

а) $5 : 15 = 4 : 12;$

б) $\dfrac{12}{0,2} = \dfrac{30}{0,5};$

в) $\frac{m}{p}=\frac{p}{k}$.

№ 4. Решите пропорцию:

а) $5^{\frac{3}{5}}:3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{4}}:x$;

б) $\frac{12,3}{6}=\frac{7x}{4,2}$;

в) $x:3^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{2}}:2^{\frac{1}{4}}$;

г) $\frac{1}{2}x:5=16:0,8$;

д) $0,2:(x-2)=\frac{1}{2}:2^{\frac{1}{2}}$;

е) $2^{\frac{2}{3}}:0,24=1^{\frac{7}{9}}:(x+0,06)$.

№ 5. Из данных четырех чисел первые три пропорциональны числам 5, 3, 20, а четвертое число составляет 15% третьего. Найдите эти числа, если второе число на 375 меньше суммы остальных.

№ 6. Решите задачи по теме «Правила округления чисел. Погрешность».

1) Длина шприца составляет 6,5 + 0,1 см. Определите абсолютную и относительную погрешность измерения.

2) Измерили температуру пациента, она составила 38,3 °С + 0,05 °С. Определите абсолютную и относительную погрешность измерения.

3) Измерили толщину человеческого волоса d и расстояние от Земли до Луны l. Получили $d \approx 0{,}15$ мм с точностью 0,01 мм и $l \approx 384000$ км с точностью до 500 км. Сравните качества измерений, оценив относительные погрешности.

4) Округлите число 82 719,364 до тысяч, до сотен, до десятков, до единиц, до десятых, до сотых.

5) Найдите среднее арифметическое количества инъекций в день по палатам терапевтического отделения больницы и результат округлите до целых по данным таблицы:

№ палаты	Количество инъекций
1	6
2	5
3	2
4	12
5	7
6	3
7	3
8	15
9	2
10	8

№ 7. Заполните таблицу:

1%	2%	5%	10%	15%	20%	25%	30%	50%	75%	100%
0,01										
$\frac{1}{100}$										

№ 8. Лаборантам было дано задание обследовать 280 анализов. Они рассмотрели 350. На сколько процентов лаборанты перевыполнили задание? На сколько процентов лаборанты выполнили задание?

Ответ: 25%, 125%.

№ 9. В какое количество воды нужно добавить 200 г хлорной извести, чтобы получился 10%-ный раствор?

Ответ: 1,8 л воды.

№ 10. Лекарственная ромашка при сушке теряет 84% своей массы. Сколько ромашки должны собрать школьники, если они обязались высушить и сдать в аптеку 16 кг этого растения?

Ответ: 100 кг.

№ 11. Молоко дает 25% сливок, сливки дают 20% масла. Сколько масла получится из 240 кг молока?

Ответ: 12 кг.

№ 12. Сколько % соли содержит раствор, если он был получен из 60 г соли и 140 г воды?

Ответ: 30%.

№ 13.

Определите процентную концентрацию раствора (количественный состав в %), если концентрация раствора в соотношении 8 : 1000.

Ответ: 0,8%.

№ 14. Определите концентрацию раствора в соотношении, если процентная концентрация составила 4%.

Ответ: 1 : 25.

№ 15

Смешали индийский и грузинский чай, так что индийский чай составил 30% всей смеси. Если в эту смесь добавить еще 120 г индийского чая, то он будет составлять 45% смеси. Сколько граммов индийского чая было в смеси первоначально?

Ответ: 132 г.

№ 16. В какое количество воды нужно добавить 300 г сахара, чтобы получился 15%-ный раствор?

№ 17. Сколько воды нужно взять, чтобы из 1 кг хлорной извести получился 10%-ный раствор?

№ 18. Сколько воды нужно взять, чтобы из 1 кг соли получился 17%-ный раствор?

№ 19. В санатории отдыхали мужчины и женщины. Мужчины составляли 920 человек, или 46% всех отдыхающих. Сколько всего человек отдыхали в санатории?

№ 20. В аптеку привезли две партии лекарств: 500 упаковок таблеток с содержанием 15% антибиотиков и 700 упаковок таблеток с содержанием 10% антибиотиков. В какой партии таблеток содержится больше антибиотиков?

№ 21. Грибы при сушке теряют 79% своей массы. Сколько сушеных грибов получится, если взять 20 кг свежих?

№ 22. Объем крови у взрослого человека составляет 5 л. При глубоком порезе он теряет 8% от общего объема. Определите объем потери крови.

№ 23. Объем циркулирующей крови в организме составляет 1/13 от массы тела. В венозной системе находится 70%, а в артериальной — 20% крови. Сколько крови находится в венозной и артериальной системах человека массой 52 кг?

№ 24. Сколько атропина сульфата содержится в 1 мл 0,1%-ного раствора?

№ 25. В медицинском колледже обучается 900 студентов, из которых 153 юноши. Сколько процентов юношей обучается в колледже?

№ 26. У медсестры в процедурном кабинете было 12 упаковок стерильных салфеток. Она израсходовала одну упаковку. Сколько процентов стерильных салфеток израсходовала медсестра?

№ 27. При перевозке лекарств разбили 2 % ампул, что составило 24 штуки. Сколько всего ампул перевозили?

№ 28. Педиатрическое отделение рассчитано на 35 больных. Во время эпидемии гриппа в отделение поставили дополнительно 10 коек. На сколько процентов будет заполнено отделение во время эпидемии?

№ 29. В растворе содержится 40% соли. Если добавить 120 г соли, то в растворе будет содержаться 70% соли. Сколько граммов соли было в растворе первоначально?

№ 30. Кусок сплава меди и цинка массой в 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60 % меди?

№ 31. В двух группах обучалось 66 студентов, причем в первой на 20% больше, чем во второй. Сколько студентов обучалось в первой группе?

№ 32. Решите задачи, используя известные сведения об анатомии и физиологии человека.

Кровь у новорожденного ребенка составляет 15% от массы тела, у детей до года — 11% от массы тела.

Кровь у взрослого человека составляет 6–8% от массы тела. Через почки протекает 1500 л крови, а вся кровь проходит за 5 минут (5–6 л).

Масса сердца взрослого человека составляет 1/220 часть от массы тела (0,425–0,570). Масса сердца новорожденного в среднем 0,66–0,80 % от массы тела (около 20 г). Параметры сердца взрослого человека: длина $h \approx 12–15$ см, поперечный разрез $d_1 \approx 8–10$ см, передний–задний разрез $d_2 \approx 5–8$ см. Для вычисления объема сердца используют формулу объема конуса:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 h.$$

Вариант 1.

1) Заполните таблицу:

Приготовьте 5 л рабочего раствора хлорной извести различной концентрации:

Концентрация раствора, %	Количество хлорамина	Количество воды, мл
0,2		
1,0		
3,0		

2) Определите процентную концентрацию раствора 2 : 5000.

3) Грудной сбор № 4 содержит:

– цветы аптечной ромашки — 20%,
– побеги багульника болотного — 20%,
– цветы календулы (ноготки) — 20%,
– фиалки трехцветной травы — 20%,
– корни солодки — 15%,
– листья мяты перечной — 5%.

Сбор расфасован в пакетики по 2 г. Рассчитайте, сколько граммов каждого компонента содержится в одном пакетике.

4) Объем циркулирующей крови в организме человека составляет 1/13 от массы тела. В паренхиматозных органах находится 20% циркулирующей крови. Вычислить объем крови в паренхиматозных органах человека массой 65 кг.

5) Вес человека 105 кг. Сколько весит его спинной мозг, если его масса составляет 0,05% от массы тела?

Вариант 2.

1) Заполните таблицу:

Приготовьте 3 л рабочего раствора хлорамина различной концентрации:

Концентрация раствора, %	Количество хлорамина	Количество воды, мл
0,2		
1,0		
3,0		
5,0		

2) Грудной сбор № 4 заваривают по два фильтра-пакета на 100 г воды и принимают внутрь 3 раза в день до еды. Хватит ли пациенту упаковки этого сбора на неделю, если в упаковке содержится 20 фильтров-пакетов?

3) Концентрация фурацилина в растворе 1 : 5000. Сколько чистого вещества фурацилина находится в 1 мл раствора?

4) Объем крови в организме человека составляет 7% от массы тела. В скелетной мускулатуре — 7%, в печени — 5%, на сердце, легкие, мозг, селезенку, почки приходится по 0,5%. Найти массу крови в указанных органах человека массой 70 кг.

5) Площадь поверхности кожи человека 2 м^2, площадь поверхности коры больших полушарий 0,25 м^2. Определите, сколько процентов составляет площадь поверхности коры больших полушарий от площади поверхности кожи.

Вариант 3.

1) Определите количество воды и вещества для приготовления дезинфицирующего раствора из расчета на 1 л 3%-ного раствора хлорамина.

2) Определите процентную концентрацию раствора 3 : 6000.

3) Сколько граммов фурацилина находится в:
   а) 200 мл 0,02%-ного раствора;
   б) 500 мл 0,02%-ного раствора.

4) Объем циркулирующей крови в организме человека составляет 1/13 от массы тела. В сердечно-сосудистой системе находится 80% циркулирующей крови. Посчитайте объем крови в сердечно-сосудистой системе человека массой 78 кг.

5) Вычислите объем спинномозговой жидкости в спинномозговом канале, если его длина h = 40 см, диаметр d = 1,4 см ($V = \pi R^2 h = \pi d h$).

Вариант 4.

1) Определите количество воды и вещества для приготовления дезинфицирующего раствора из расчета на 1 л 5%-ного раствора хлорамина.

2) Определить процентную концентрацию раствора 4 : 1000.

3) Фурацилина в растворе всего 0,02%. Сколько литров дезраствора можно получить из 2 г фурацилина?

4) Объем циркулирующей крови в организме человека составляет 1/13 от массы тела. В венозной системе находится 70%, а в артериальной — 20% крови. Сколько крови находится в венозной и артериальной системах человека массой 52 кг?

5) Масса головного мозга взрослого человека 1370 г. Сколько это процентов от всей массы тела, если вес человека 78 кг?

Вариант 5.

1) Определите количество воды и вещества для приготовления дезинфицирующего раствора из расчета на 10 л 1,0%-ного раствора хлорной извести.

2) Определите процентную концентрацию раствора 2 : 1000.

3) Больному увеличена доза препарата в 2 раза и составила 250 мл в сутки. На сколько процентов увеличилась при этом доза препарата?

4) Объем крови у взрослого человека составляет 5 л. При глубоком порезе он потеряет 15% от общего объема. Найдите, какова потеря крови?

5) Масса спинного мозга взрослого человека 38 г, а головного мозга — около 1500 г. Какой процент от массы спинного мозга составляет масса головного мозга?

Вариант 6.

1) Определите количество воды и вещества для приготовления дезинфицирующего раствора из расчета на 10 л 0,5%-ный раствор хлорной извести.

2) Определите процентную концентрацию раствора 1 : 5000.

3) В больнице 190 койко-мест. Из них заполнено больными 152 места. На сколько процентов заполнена больница?

4) Кровь состоит из плазмы и взвешенных в ней клеток эритроцитов, лейкоцитов и тромбоцитов. Взвешенные клетки составляют 45% от массы крови. Сколько процентов составляет масса плазмы от массы крови?

5) Масса головного мозга у взрослого человека составляет от 1100 до 2000 г. Масса спинного мозга составляет 2% от массы головного мозга. Вычислите массу спинного мозга.

Вариант 7.

1) Определите количество воды и вещества для приготовления дезинфицирующего раствора из расчета на 10 л 3%-ный раствор хлорной извести.

2) Определите процентную концентрацию раствора 3 : 4000.

3) Потребность поликлиники в специалистах — 25 человек, а работает всего 22 человека. Сколько это составляет процентов?

4) Объем крови у взрослого человека составляет 7% от его массы. Вычислите, сколько литров крови у человека массой 90 кг.

5) Через почки в течение суток протекает 1500 л крови. Вся кровь через почки проходит примерно через 5 мин (5–6 л). Сколько крови пройдет через почки человека за час?

Вариант 8.

1) Определите количество воды и вещества для приготовления дезинфицирующего раствора из расчета на 3 л 3%-ного рабочего раствора хлорамина.

2) Определите процентную концентрацию раствора 8 : 1000.

3) Определите количество фурацилина в 2 л раствора концентрацией 1 : 2000.

4) Вычислите объем сердца взрослого человека, если $h = 13$ см, $d = 9$ см.

5) За сутки через почки проходит 1500 л крови. Сколько крови пройдет через почки за 2 ч?

Вариант 9.

1) Определите количество воды и вещества для приготовления дезинфицирующего раствора из расчета на 5 л 5%-ного рабочего раствора хлорамина.

2) Определите концентрацию раствора в соотношении, если процентная концентрация составила 0,02%.

3) Вычислите массу сердца новорожденного человека, если известно, что в 3 месяца его вес был 5 кг 200 г и он набирал в весе ежемесячно согласно среднетабличному значению.

4) Вместимость мочевого пузыря 600 мл. Он заполнен на 25%. Сколько миллилитров мочи находится в мочевом пузыре?

5) Сколько таблеток фурацилина нужно для наведения 0,5%-ного раствора в объеме 3 л, если одна таблетка весит 0,25 г?

Вариант 10.

1) Определите количество воды и вещества для приготовления дезинфицирующего раствора из расчета на 10 л 10%-ного осветленного раствора хлорной извести.

2) Определите концентрацию раствора в соотношении, если процентная концентрация составила 1%.

3) Сколько граммов лекарств в таблетках примет больной за двухнедельный курс лечения, если каждый день он должен принимать три вида таблеток по 0,25 г 3 раза в день?

4) Масса сердца составляет 1/220 часть от массы тела человека. Вычислите массу сердца человека весом 70 кг.

5) Вместимость мочевого пузыря человека 600 мл. Он заполнен на 58%. Сколько это составляет миллилитров?

Вариант 11.

1) Рассчитайте в граммах состав 5 л 0,5%-ного комплексного моющего раствора с 6%-ной перекисью водорода.

2) Определите концентрацию раствора в соотношении, если процентная концентрация составила 0,05%.

3) Сколько граммов спирта израсходует медсестра для компрессов пяти пациентам, если на один компресс она тратит 20 г спирта?

4) Вес четырехмесячного плода равен 120 г, а вес семимесячного плода — 1100 г. Сколько процентов вес четырехмесячного плода составляет от веса семимесячного плода?

5) Вычислите массу человека 60 лет, если известно, что в 43 года он весил 46 кг и ежегодно прибавлял в весе по 0,5 кг.

2. Зак. 475

Вариант 12.

1) Рассчитайте в граммах состав 2 л 0,5%-ного комплексного моющего раствора с 3%-ной перекисью водорода.

2) Определите концентрацию раствора в соотношении, если процентная концентрация составила 0,001%.

3) Вычислите массу сердца новорожденного ребенка, если его вес — 3 кг 400 г, а масса сердца составляет 0,06% от массы тела.

4) Масса сердца составляет 1/220 часть от массы тела человека. Вычислите массу сердца человека 35 лет, если известно, что в 27 лет он весил 116 кг и ежегодно терял в весе по 1,5 кг.

5) Вычислите объем сердца взрослого человека, если его длина $h = 15$ см, а поперечный разрез $d = 10$ см $\left(V = \frac{1}{12}\pi d^2 h\right)$.

Вариант 13.

1) Рассчитайте в граммах состав 3 л 0,5%-ного комплексного моющего раствора с 5%-ной перекисью водорода.

2) Определите концентрацию раствора в соотношении, если процентная концентрация составила 0,04%.

3) Масса крови новорожденного ребенка составляет 15% от массы тела. Рассчитайте массу крови новорожденного ребенка весом 4 кг 800 г.

4) Вычислите массу сердца новорожденного весом 3,3 кг, если известно, что масса сердца новорожденного составляет 0,8% от массы тела.

5) Емкость мочевого пузыря трехмесячного ребенка составляет 100 мл. Он заполнен на 25%. Сколько миллилитров мочи находится в мочевом пузыре?

Вариант 14.

1) Рассчитайте в граммах состав 5 л 1%-ного комплексного моющего раствора с 3%-ной перекисью водорода.

2) Определите процентную концентрацию раствора 9 : 2000.

3) Вес трехмесячного плода равен 100 г, а вес семимесячного плода — 1000 г. Сколько процентов вес трехмесячного плода составляет от веса семимесячного?

4) Вычислите массу сердца новорожденного весом 4,5 кг, если известно, что масса сердца ребенка составляет 0,66% от массы тела.

5) Суточный диурез здорового человека 1,5 л. Рассчитайте почасовой диурез.

Вариант 15.

1) Рассчитайте в граммах состав 5 л 2%-ного комплексного моющего раствора с 5%-ной перекисью водорода.

2) Определите концентрацию в соотношении, если процентная концентрация составила 0,4%?

3) Роженица весила 72 кг, ребенок родился массой 3,5 кг. Сколько процентов составляет масса ребенка от массы матери?

4) Вычислите массу сердца человека весом 86 кг, если известно, что масса сердца составляет 1/200 часть от массы тела.

5) Емкость мочевого пузыря шестимесячного ребенка составляет 200 мл. Он заполнен на 30%. Сколько миллилитров мочи находится в мочевом пузыре?

Вариант 16.

1) Гексенал (наркотическое средство) выпускают во флаконах по 1 г сухого вещества. Для работы разводят гексенал в 50 мл физраствора. Для внутривенного введения наркоза необходимо 600 мг вещества гексенала. Сколько миллилитров раствора содержат такое количество (600 мг) гексенала?

2) Определите концентрацию в соотношении, если процентная концентрация составила 0,08%.

3) Масса крови у детей до года составляет 11% от массы тела. Рассчитайте массу крови семимесячного ребенка весом 8 кг 300 г.

4) Вычислите объем сердца взрослого человека, если его длина $h = 12$ см, а поперечный разрез $d = 8$ см $\left(V = \frac{1}{12}\pi d^2 h\right)$.

5) У человека в сутки вырабатывается 500–1500 мл желчи. Процесс желчеобразования идет непрерывно, а желчевыделение происходит периодически, в основном в связи с приемом пищи. Выясните, сколько желчи вырабатывается в среднем за час?

Вариант 17.

1) Больному введено 400 мг вещества гексенала. Флаконы гексенала (1 г) разводят 100 мл физраствора. Сколько миллилитров физраствора было введено больному?

2) Определите концентрацию в соотношении, если процентная концентрация составила 0,005%.

3) Рассчитайте массу крови трехмесячного ребенка со средней прибавкой веса, если известно, что он родился весом 3,5 кг.

4) Плазма составляет 60% от крови, а кровь составляет 7% от массы тела. В ее состав входит: белка — 8%, неорганических веществ — 2 и 90% воды. Рассчитайте состав плазмы человека массой 60 кг.

5) Учеными установлено, что левый желудочек сердца в среднем выбрасывает за 1 мин в аорту около 5000 мл крови. В почки же за это время поступает только 25% крови от этого количества. Выясните, какое количество крови поступает в почечные артерии человека за 1 мин, час, сутки?

Вариант 18.

1) Гексенал выпускается во флаконах по 1 г. Развели гексенал 50 мл физраствора. Раствор какой процентной концентрации использован для наркоза?

2) Определите концентрацию в соотношении, если процентная концентрация составила 0,06%.

3) Определите суточное выделение мочи пятилетнего ребенка по формуле $M = 600 + 100(n - 1)$; n — количество лет.

4) Вода составляет 60% от массы тела человека. В клеточном секторе вода содержится в объеме 50% от общего количества, в интерстициальном — 20, в сосудистом — 5%. Сколько воды содержится в каждом из секторов человека массой 70 кг?

5) Вычислите объем бактерии, имеющей форму шара (на примере сине-зеленой водоросли), если ее диаметр равен 2 мкм, а объем шара $V = 4/3\pi R^3$.

Вариант 19.

1) Больному вводили глюкозу; затем сделали инъекцию инсулина – 5 ЕД. Сколько 10%-ной глюкозы было ранее введено больному (1 ЕД инсулина расщепляет примерно 4 г сухого вещества сахара (глюкозы))?

2) Рассчитайте необходимое количество инсулина (ЕД) при условии, что 1 ЕД расщепляет 5 г сахара сухого вещества, если введено 10%-ной глюкозы 800 мл.

3) Сердце нетренированного человека в состоянии покоя совершает обычно 80 ударов в минуту, выталкивая при этом в аорту 50–70 мл крови. Вычислите, сколько ударов в час делает сердце и сколько литров крови выталкивает при этом в аорту?

4) Масса одной микробной клетки определяется в 0,00000000157 доли мг, масса же вирусной частички меньше микробной клетки в 1500 раз. Определите массу вирусной клетки.

5) Рассчитайте необходимое количество инсулина (ЕД) при условии, что 1 ЕД расщепляет 5 г сахара сухого вещества, если введено 25%-ной глюкозы 600 мл.

Вариант 20.

1) Введено 300 мл 20%-ной глюкозы. Сколько единиц инсулина (1 ЕД расщепляет 4 г сахара) нужно ввести пациенту для исключения нарушения метаболических процессов в организме?

2) Определите концентрацию в соотношении, если процентная концентрация составила 0,1%.

3) У ребенка до года определяется число зубов по формуле $n - 4$, где n — количество месяцев. Определите количество зубов у ребенка 10 месяцев.

4) Спортивные физиологи знают, что частота сокращений сердца у спортсменов в момент максимального напряжения может достигать более 240 ударов в минуту. Во сколько раз это превышает норму для обычного человека в состоянии покоя?

5) Микробы, находящиеся в пространстве до уборки помещения площадью 16 м^2, 2000000 на 1 см^2, после уборки 100000 на 1 см^2. Сколько всего находилось в помещении микробов до уборки и после? На сколько процентов помещение стало чище?

Вариант 21.

1) Сколько единиц инсулина нужно ввести, если больному прокапали 200 мл 20%-ной глюкозы (1 ЕД инсулина расщепляет примерно 4 г сухого вещества сахара (глюкозы))?

2) Отвар содержит 3% корней алтея. Сколько отвара можно приготовить из 600 г корней алтея?

3) Рассчитайте массу крови новорожденного ребенка весом 3,8 кг.

4) Известно, что человек на 2/3 состоит из воды. Сколько это составляет килограммов для человека весом 87 кг?

5) Анализ крови показал, что в 1 мм^3 крови находится 7 000 лейкоцитов полулунной формы, 5 000 000 эритроцитов круглой формы и 1000 ромбовидных тел вируса (гепатита В). Определите зараженность крови, зная ее средний объем (6 л).

Вариант 22.

1) Сколько единиц инсулина нужно ввести больному для исключения метаболических процессов в организме (из расчета 1 ЕД на 4 г сахара), если ему введено 400 мл 10%-ной глюкозы?

2) Чистого вещества в растворе 0,025%. Сколько литров раствора можно получить из 30 г чистого вещества?

3) Ребенок родился массой 2 850 г и прибавлял в весе согласно базовой таблице (см. задачу № 40). Масса головного мозга новорожденного составляет 400 г. Вычислите, сколько процентов от массы тела составляет масса головного мозга.

4) Кость голени человека имеет длину $h = 40$ см, ширину $d = 5$ см. Вычислите объем кости.

5) В 1 кг почвы содержится 2500 редуцентов (микроорганизмы, разрушающие отмершие остатки живых существ, превращающие их в неорганические соединения и простейшие органические соединения). Сколько редуцентов будет содержаться в 5 кг почвы?

Вариант 23.

1) Пациенту введено 4 ЕД инсулина (1 ЕД на 4 г сахара) для исключения обменных изменений в организме на введенную глюкозу. Сколько 40%-ной глюкозы было ранее введено пациенту?

2) Чистого вещества в растворе 0,024%. Сколько литров раствора можно получить из 30 г чистого вещества?

3) Рассчитайте массу крови новорожденного ребенка весом 4 кг 500 г.

4) Трахея имеет форму трубки длиной $h = 9$ см, диаметром $d = 1{,}5$ см. Вычислите максимальный объем трахеи ($V = S \cdot h = \pi \cdot d \cdot h$).

5) На поверхности кожи площадью 1 см^2 находится 5000 разнообразных вирусов и микробов. Вычислите, сколько вирусов и микробов находится на 1 м^2 кожи?

Вариант 24.

1) Для восстановления энергетического обмена больному ввели за сутки 1,2 л 30%-ного раствора глюкозы. Сколько граммов чистой глюкозы было введено?

2) Сколько сульфацила натрия находится во флаконе 5 мл 30%-ного раствора? А в трех флаконах? А в шести?

3) Рассчитайте массу крови новорожденного ребенка весом 2,5 кг.

4) Трубчатая кость имеет длину $h = 20$ см, диаметр $d = 3$ см. Вычислите объем кости.

5) В 1 м^3 воздуха содержится 7500 различных микроорганизмов. В каком объеме воздуха будет содержаться 7 500 000 микроорганизмов?

Вариант 25.

1) Для дезинтоксикации организма больному введено 1,5 л 5%-ной глюкозы. Сколько чистого вещества глюкозы было введено?

2) Сколько атропина сульфата содержится в 1 мл 0,1%-ного раствора?

3) Больному назначен пенициллин 500 тыс. ЕД 4 раза в день в течение 7 дней. Больной попросил медсестру

подсчитать количество флаконов пенициллина, которое необходимо для лечения. Какой ответ больному дала медсестра, если 1 флакон содержит:

а) 1 млн ЕД;

б) 500 тыс. ЕД?

4) В теле человека 208 костей. На скелет туловища приходится 62 кости. На лицевой и мозговой череп приходится 23 кости. Сколько процентов от общего количества составляют:

а) скелет туловища;

б) скелет головы?

5) Вычислите объем бактерии, имеющей форму цилиндра с радиусом 1 мкм и длиной 25 мкм.

Вариант 26.

1) Рассчитайте необходимое количество инсулина (ЕД) при условии, что 1 ЕД расщепляет 5 г сахара сухого вещества, если введено 20%-ной глюкозы 350 мл?

2) Сколько дикаина находится в 0,5 л 0,25%-ного раствора?

3) Масса мозга новорожденного с весом 3 500 г составила 400 г. Сколько это процентов от массы тела?

4) Мышечная система человека составляет 40% от веса тела. Найдите массу мышц человека весом 60 кг.

5) Вирусы в среднем в 50 раз мельче бактерий (от 20 до 300 нанометров — миллиардных долей метра). Определите массу вируса, если масса средней бактерии $1{,}5\ \ 10^{-9}$.

Вариант 27.

1) На каждые 5 °С свыше 25 °С окружающей среды теряется дополнительно 500 мл жидкости. Рассчитайте, какое количество жидкости теряет человек при:

а) t = 40 °С;

б) t = 35 °С.

2) Сколько новокаина содержится в ампуле 10 мл 0,5%-ного раствора?

3) Рассчитайте массу крови четырехмесячного ребенка со средней прибавкой веса, если вес при рождении ребенка составил 2 кг 800 г, а масса крови у детей до одного года составляет 11% от массы тела.

4) Масса человека 70 кг. Мышечная система составляет 40% от массы тела. На мышцы нижних конечностей приходится 50% от общего количества мышц. Сколько это килограммов?

5) Бактерии очень быстро размножаются, некоторые виды делятся каждые 20 мин. Сколько таких бактерий окажется в помещении через 3 ч, если первоначально туда попали две бактерии?

Вариант 28.

1) Сколько ацеклидина содержится в ампуле 2 мл 0,2%-ного раствора?

2) На каждый градус выше 37 °С тела человека теряется дополнительно 500 мл жидкости. Рассчитайте, какое количество жидкости теряет человек при температуре тела:

а) 40 °С;

б) 38 °С.

3) У новорожденного человека мозг весит 340–400 г. В течение года он удваивает массу, а к 6 годам утраивает. Сколько будет весить мозг к 6 годам?

4) Найдите массу костной системы человека весом 95 кг, если известно, что костная система составляет 55% от массы тела.

5) Рассчитайте необходимое количество инсулина (ЕД) при условии, что 1 ЕД расщепляет 5 г сахара сухого вещества, если введено 5%-ной глюкозы 2 л?

Вариант 29.

1) Рассчитайте количество жидкости, которое теряет человек в жаркое время года при температуре тела 40 °С и температуре воздуха:

а) 35 °С;

б) 40 °С.

Если на каждые 5 °С свыше 25 °С окружающей среды теряется дополнительно 500 мл жидкости и на каждый градус свыше 37 °С тела человека теряется дополнительно 500 мл жидкости.

2) Имеется 250 г лекарственного сбора. Для приготовления отвара используют соотношение 30 г : 200 мл.

Сколько литров отвара можно приготовить из данного сбора?

3) Рассчитайте массу крови новорожденного ребенка весом 4,1 кг.

4) Какова масса мышц тридцатилетнего мужчины весом 78 кг, если известно, что мышечная система составляет 40% от массы тела?

5) Рассчитайте количество сухого вещества в 500 мл 40%-ного раствора.

Вариант 30.

1) Рассчитайте потерю жидкости в организме человека при полостной операции и температуре 38 °С (потеря жидкости при полостной операции составляет 1 л, а на каждые 5 °С свыше 25 °С окружающей среды теряется дополнительно 500 мл жидкости).

2) 200 мл отвара сбора № 4 содержат 15% корней солодки. Сколько это граммах?

3) Насколько изменилась масса крови трехмесячного ребенка, если известно, что он родился с весом 2 кг 800 г?

4) Мышечная система составляет 40% от массы тела. Какую часть занимает мышечная система у человека массой 70 кг?

5) Рассчитайте количество сухого вещества в 1 мл 3,6%-ного раствора.

Вариант 31.

1) Рассчитайте потерю жидкости в организме человека при температуре воздуха 35 °С, рвоте и поносе, если известно, что потеря жидкости при рвоте составляет 500 мл, поносе — 500 мл и на каждые 5 °С свыше 25 °С окружающей среды теряется дополнительно 500 мл жидкости.

2) Рассчитайте количество сухого вещества в 250 мл 0,1%-ного раствора.

3) Насколько изменилась масса крови годовалого ребенка, если известно, что он родился с весом 3 кг 700 г?

4) Если предположить, что голова человека – это шар, то можно найти ее объем по формуле объема шара. Чему он будет равен у человека, размер головы которого 56 см?

5) Рассчитайте количество сухого вещества в 1 мл 2,4%-ного раствора.

Вариант 32.

1) Пациенту назначено введение 4,8 л раствора внутривенно в сутки. Рассчитайте скорость инфузии, если известно, что 1 мл жидкости равен 20 каплям?

2) Больному назначены таблетки бромгексина-4 три раза в сутки. Вместо вышеуказанного больной принимал бромгексин-8, но по соответствующей дозе. Сколько таблеток принял больной за сутки?

3) Вычислите массу сердца новорожденного ребенка весом 4 кг 100 г, если масса сердца составляет 0,8% от массы тела.

4) Мышцы взрослого человека составляют 40% от общей массы тела. Какова масса мышц сорокалетнего мужчины, если его вес составляет 90 кг?

5) Объем крови у взрослого человека составляет 5,5 л. При глубоком порезе он теряет 8% от общего объема. Определите объем потери крови.

Вариант 33.

1) Пациенту назначено введение 7,2 л раствора внутривенно в сутки. Рассчитайте скорость инфузии, если известно, что 1 мл жидкости равен 20 каплям?

2) Сделана инъекция галантамина гидробромида 1 мл 25%-ного раствора. Сколько сухого вещества содержалось во введенном препарате?

3) Насколько изменилась масса крови взрослого человека, если известно, что при весе 76 кг он похудел на 11 кг?

4) Скелет человека состоит из 208 костей, из них 85 — парных. Сколько непарных костей?

5) Объем циркулирующей крови в организме составляет 1/13 от массы тела. В венозной системе находится 70%, а в артериальной — 20% крови. Сколько крови находится в венозной и капиллярной системах человека массой 70 кг?

Вариант 34.

1) Пациенту назначено введение 2,4 л раствора внутривенно в сутки. Рассчитайте скорость инфузии, если известно, что 1 мл жидкости равен 20 каплям.

2) Рассчитайте количество сухого вещества в 1 мл 1%-ного раствора.

3) Насколько изменилась масса крови взрослого человека, если известно, что к 65 кг он прибавил в весе 24 кг?

4) Скелетные мышцы составляют активную часть аппарата движения. Их суммарная масса составляет около 40% от общей массы тела, 50% скелетных мышц приходится на нижние конечности, 30 — на верхние. Сколько килограммов мышц приходится на голову и туловище человека массой 70 кг?

5) Сколько атропина сульфата содержится в 1 мл 0,1%-ного раствора?

Вариант 35.

1) Сколько жидкости можно перелить больному за сутки, если скорость введения раствора 90 кап/мин; 25 кап/мин; 120 кап/мин, а 1 мл жидкости равен 20 каплям?

2) Сульфаниламидные препараты вводятся из расчета 0,2 мг на 1 кг массы тела. Сколько нужно ввести препарата для ребенка 8 лет массой 30 кг?

3) Рассчитайте, насколько изменилась масса крови взрослого человека, если первоначальный вес его составлял 68 кг, а за 3 месяца он набрал 8 кг, за последние 2 месяца сбросил 4 кг?

4) Рассчитайте, сколько киллограммов от массы тела приходится на опорно-двигательную систему человека и сколько отдельно на скелет, если масса человека 75 кг: на опорно-двигательную систему приходится 40%, отдельно на кости — 10%.

5) В медицинском колледже обучаются 900 студентов, из которых 100 юноши. Сколько процентов юношей обучается в колледже?

Вариант 36.

1) Для раствора используется соотношение 5 : 200. Сколько литров раствора можно приготовить из 1,5 кг чистого вещества?

2) Для лечения дисбактериоза используется витабаланс 3000. 1 капсула заквашивается в 1 л молока и используется в течение 5 дней. Сколько капсул препарата следует приобрести для лечения в течение месяца (30 дней)?

3) Объем циркулирующей крови в организме составляет 1/13 от массы тела. Просчитайте объем циркулирующей крови, если масса человека составляет 78 кг.

4) Масса человека 75 кг. Мышечная система составляет 40% от массы тела. На мышцы верхних конечностей приходится 25% от общего количества мышц. Сколько это килограммов?

5) У медсестры в процедурном кабинете было 25 упаковок стерильных салфеток. Она израсходовала одну упаковку. Сколько процентов стерильных салфеток израсходовала медсестра?

Вариант 37.

1) Определите процентную концентрацию раствора 1 : 1000.

2) Больному назначен пенициллин по 500 тыс. ЕД 4 раза в день. Сколько флаконов будет использовано в течение 7 дней, если 1 флакон содержит в себе 1 млн ЕД пенициллина?

3) У человека время кругооборота крови, в течение которого кровь проходит оба круга кровообращения, составляет 23 с. Из этого времени 1/5 приходится на малый круг кровообращения. Сколько времени приходится на большой круг кровообращения?

4) Вычислите объем спинномозговой жидкости в спинномозговом канале, если его длина $h = 43$ см, а диаметр $d = 2$ см ($V = r^2h = \pi dh$).

5) При перевозке лекарств разбили 2% ампул, что составило 5 штук. Сколько всего ампул перевозили?

Вариант 38.

1) Определите процентную концентрацию раствора 5 : 1000.

2) Сбор № 4 содержит:
– цветков ромашки — 20%;
– побегов багульника болотного — 20%;
– цветков ноготков — 20%;
– травы фиалки — 20%;
– корней солодки — 15%;
– листьев мяты перечной — 5%.
Сколько граммов каждой из трав содержится в 600 мл отвара (10%)?

3) Объем циркулирующей крови в организме составляет 1/13 от массы тела. В большом круге кровообращения содержится 75–80%, а в малом — 20–25% крови. Сколько крови циркулируется в малом круге кровообращения человека массой 65 кг?

4) Масса женщины в возрасте 35 лет составляет 72 кг. Масса ее спинного мозга — 35 г. Вычислите, сколько процентов от веса тела составляет вес ее спинного мозга.

5) Педиатрическое отделение рассчитано на 45 больных. Во время эпидемии гриппа в отделение поставили дополнительно 10 коек. На сколько процентов будет заполнено отделение во время эпидемии?

Вариант 39.

1) Рассчитайте дозу сухого вещества кофеина бензоата натрия на один прием при назначении на прием столовой ложки 0,5%-ного раствора (столовая ложка равна 25 мл).

2) Рассчитайте разовую дозу прозерина при введении пациенту 1 мл 0,05%-ного раствора.

3) Объем циркулирующей крови в организме человека составляет 7% от массы тела. Рассчитайте объем циркулирующей крови человека массой 84 кг.

4) Головной мозг взрослого человека составляет 1370 г, а мозг новорожденного ребенка — 400 г. Сколько процентов мозг новорожденного ребенка составляет от мозга взрослого человека?

5) Рассчитайте почасовой диурез человека, если суточный диурез равен 1 л; 2,4 л; 0,8л.

Вариант 40.

1) Отвар из душицы, мелиссы и зверобоя готовится в соотношении: душица — 30 г, мелисса — 15 г, зверобой — 15 г, вода — 800 мл. Сколько литров отвара можно приготовить из 1 кг душицы, 0,5 кг мелиссы и 0,3 кг зверобоя?

2) Пенициллин разведен так: 500 тыс. ЕД в 5 мл новокаина. Сколько тыс. ЕД пенициллина содержится в:
а) 2,5 мл раствора;
б) 15 мл раствора;
в) 3 мл раствора?

3) Объем циркулирующей крови составляет 7% от массы тела человека. Кислородная емкость артериальной крови составляет 18%, венозной — 12% по объему. Определите кислородную емкость артериальной и венозной крови человека массой 66 кг.

4) Взрослый человек весит 90 кг. Сколько весит его спинной мозг, если он составляет 0,05 % от массы тела?

5) Рассчитайте разовую дозу прозерина при введении пациенту 2 мл 0,05%-ного раствора.

№ 33.

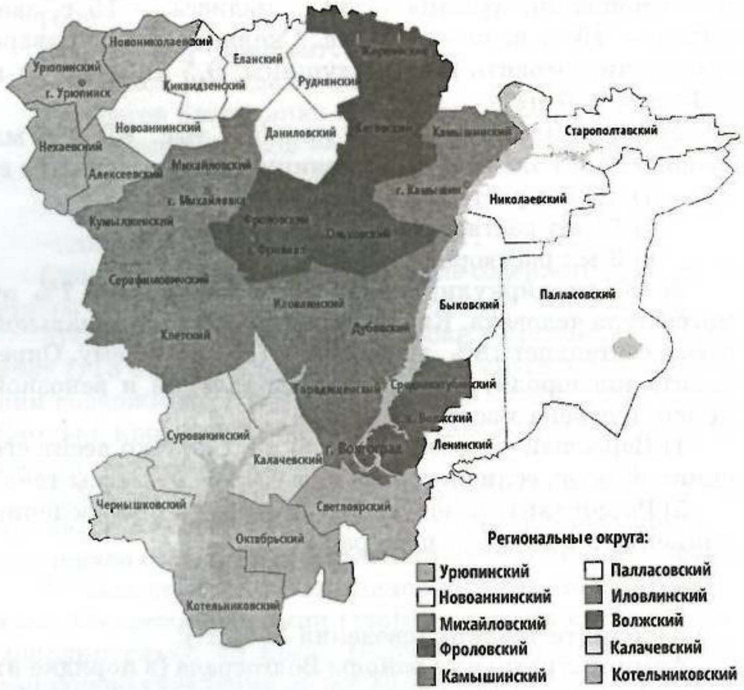
Заполните таблицу (сведения 2013 г.):

Административные районы Волгограда (в порядке их географического расположения с севера на юг):

Районы города	Площадь, км^2	%	Население, чел.	%
Тракторозаводский	54		138 848	
Краснооктябрьский	34,2		150 912	
Центральный	11,2		83 266	
Дзержинский	85,8		183 411	
Ворошиловский	27,8		82 666	
Советский	63		138 848	
Кировский	71,5		109 365	
Красноармейский	230		168 188	
ИТОГО:	577,5	100%	1 055 504	100%

№ 34.

Заполните таблицу:



Название регионального округа	Численность	% от общего числа
Урюпинский	133 603	
Новоаннинский	135 207	
Михайловский	160 675	
Фроловский	163 305	
Камышинский	172 910	
Палласовский	165 320	
Иловлинский	120 637	
Волжский	369 665	
Калачевский	119 510	
Котельниковский	100 588	
Итого по области		

ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ

1. Какие разделы математики средний медицинский персонал непосредственно использует в своей профессиональной деятельности?
2. Что такое пропорция? Самая известная пропорция с древнейших времен?
3. Перечислите единицы длины.
4. Перечислите единицы массы.
5. Перечислите единицы площади.
6. Перечислите единицы объема.
7. Сформулируйте правила округления чисел, вычисления погрешности.
8. Сформулируйте основное свойство пропорции.
9. Что такое процент? Как выразить в процентах долю вещества?
10. Какие вам известны способы решения задач «на проценты»?

Тема 1.2. Основные свойства функций и их графики

Термины

- Аргумент
- Функция
- График функции
- Способы задания функций
- Основные виды функций
- Область определения функции
- Область значений функции
- Нули функции
- Промежутки знакопостоянства
- Четность (нечетность) функции
- Монотонность функции
- Возрастание и убывание функции
- Точки экстремума
- Ограниченность функции
- Периодичность функции
- Непрерывность функции
- Наибольшее и наименьшее значения функции
- Обратные функции
- Температурный лист

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Функция

При рассмотрении количественных соотношений реального мира мы сталкиваемся с численными значениями различных физических величин, например времени, температуры, объема, длины, давления, плотности и др. В зависимости от условий величины могут принимать постоянные или переменные значения. Основным понятием математического анализа является функция.

Функция — это соответствие между множествами X и У, при котором каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества У.

Функция показывает зависимость одной переменной от другой. Переменная y называется функцией от другой переменной x, если каждому значению x из некоторого множества ставится в соответствие одно или несколько значений переменной y. Функция записывается в виде $y = f(x)$, x — независимая переменная, или аргумент, y — зависимая переменная, или функция.

Способы задания функции

1) Аналитический — с помощью формулы, например $y = x^2 + 4$.
2) Графический — с помощью графика.

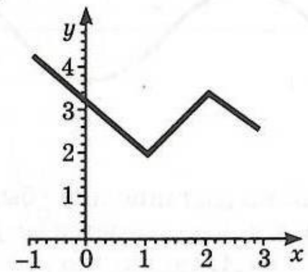
Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

3) Табличный — соответственно с помощью таблицы. Например:

X	−2	−1	0	1	2
У	4	1	0	1	4

Основные свойства функций

1) Область определения функции — значения x, при которых функция существует (имеет смысл). Рассмотрим пример.



Для графика функции, изображенного на рисунке, $D(y) = [-1; 3]$.

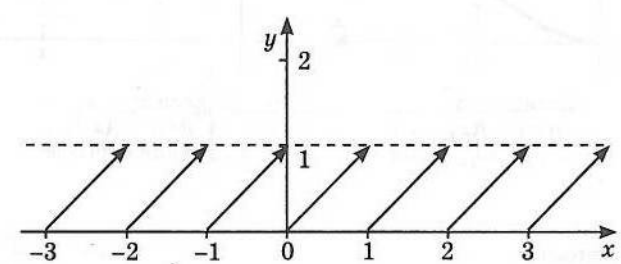
2) Область значений функции — значения y, которые принимает сама функция.
Для той же функции $E(y) = [2; 4]$.

3) Ограниченность.

Функция $y = f(x)$, $x \in A$, называется ограниченной, если существует такое число M, что для каждого $x \in A$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

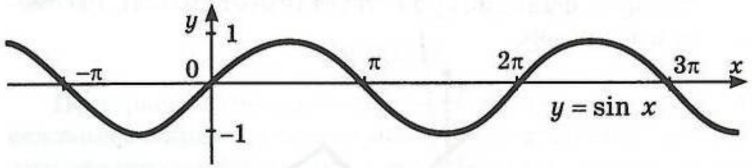
Например, $y = x - [x]$, $x \in R$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ — функция ограничена.

График функции $y = x - [x]$:



Если же точка M не существует, то функция называется неограниченной.

Например, для функции $y = \sin x$, $M = 1$, так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

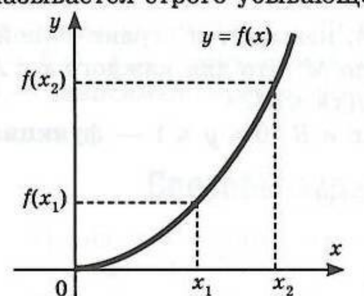


4) Монотонность: возрастание или убывание функции.

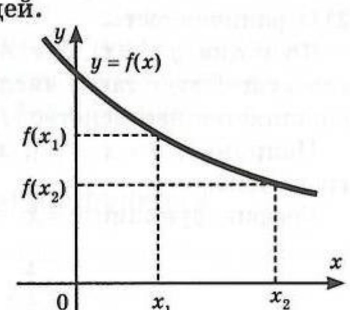
Функция $f(x)$, $x \in A$, называется возрастающей, если для любых x_1 и x_2 из A, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Если $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется строго возрастающей.

Функция $f(x)$, $x \in A$, называется убывающей, если для любых x_1 и x_2 из A, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется строго убывающей.



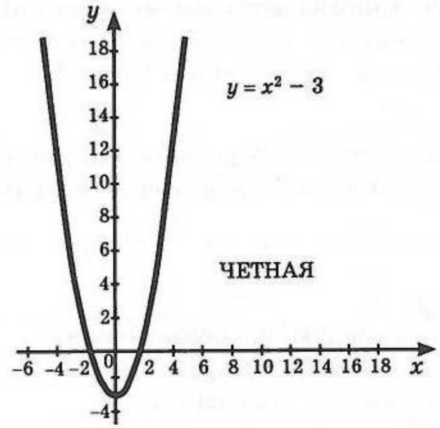
Если $x_1 < x_2$ и $f(x_1) < f(x_2)$, то функция возрастает



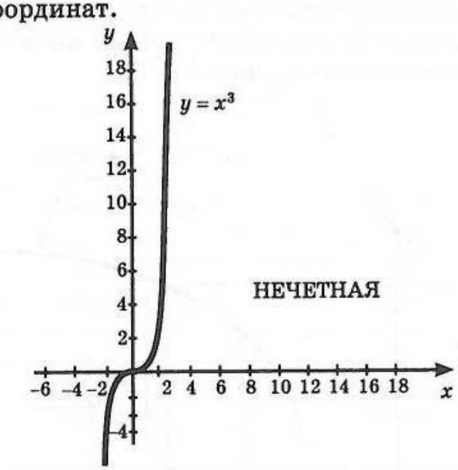
Если $x_1 < x_2$ и $f(x_1) > f(x_2)$, то функция убывает

5) Четность.

Функция $f(x)$, $x \in A$, называется четной, если для любого x из множества A выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.



Функция $f(x)$, $x \in A$, называется нечетной, если для любого x из множества A выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат, нечетной — относительно начала координат.



6) Периодичность.

Функция $y = f(x)$, $x \in A$, называется периодической, если существует число $T \neq 0$, такое, что для любого x из множества A выполняется равенство

$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T — период функции f.

Основные тригонометрические функции являются периодическими, для $y = \sin x$, $y = \cos x$ период равен 2π, для $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ период равен π.

7) Непрерывность.

Функция $y = f(x)$, определенная на интервале (a, b), называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$, если

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: $\forall\ x$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Используем следующие обозначения:

$\Delta x = x_0 - x$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$,

где Δx — приращение аргумента;

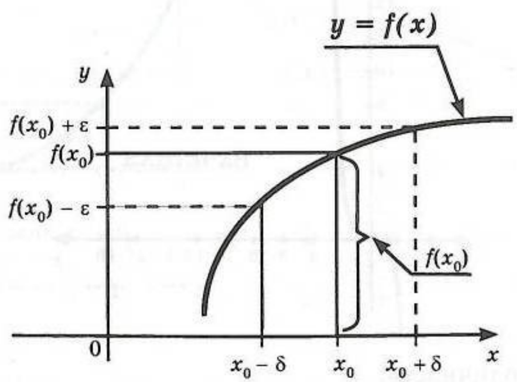
Δy — приращение функции.

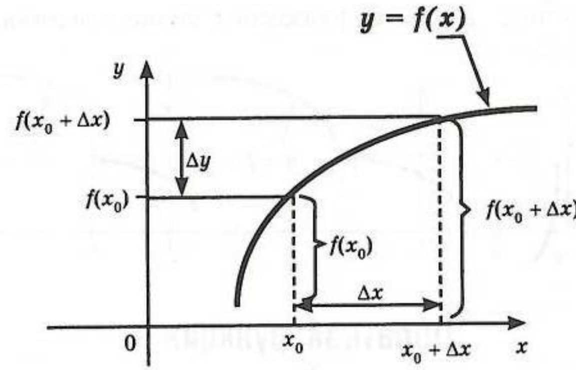
Рассмотрим другое определение непрерывности.

Пусть $y = f(x)$, где x — текущая точка из области определения.

Функция называется непрерывной на данном множестве X, если:

1) она определена на этом множестве, т.е. $\forall\ x \in X\ \exists\ f(x)$;
2) непрерывна в каждой точке этого множества, т.е. $\forall\ x \in X$ справедливо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.





Функция называется непрерывной в данной точке, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$f(x)$ — непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$:

$$|x - x_0| < \delta,\ \text{т. е. } 0 < |\Delta x| < \delta,$$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Точка, в которой нарушается непрерывность функции, называется точкой разрыва этой функции.

Пусть x_0 — точка разрыва функции f и существуют конечные пределы

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),\quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

тогда точка x называется точкой разрыва первого рода.

Величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции f в точке x.

Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то x называется точкой устранимого разрыва.

Если доопределить функцию таким образом, что

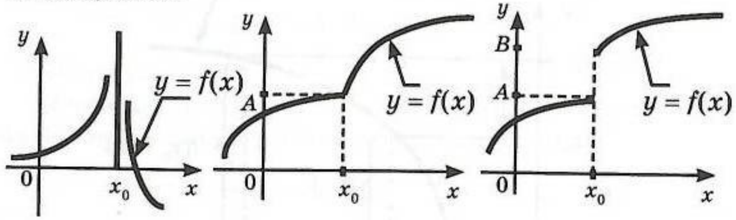
$f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то получим непрерывную

функцию.

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода. Таким образом, в точках второго рода по крайней мере

один из пределов не существует $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Различные разрывы функции в точке представлены на рисунках:



Обратная функция

Пусть задана функция $y = f(x)$, $x \in D$. Тогда каждому числу $x_0 \in D$ соответствует единственное число $y_0 = f(x)$.

Иногда приходится по значению функции y_0 находить значение аргумента x_0, т. е. решать уравнение $f(x) = y_0$ относительно x. Это уравнение может иметь несколько или даже бесконечное количество решений (решениями являются абсциссы всех точек, в которых график $y = f(x)$ пересекается с прямой $y = y_0$).

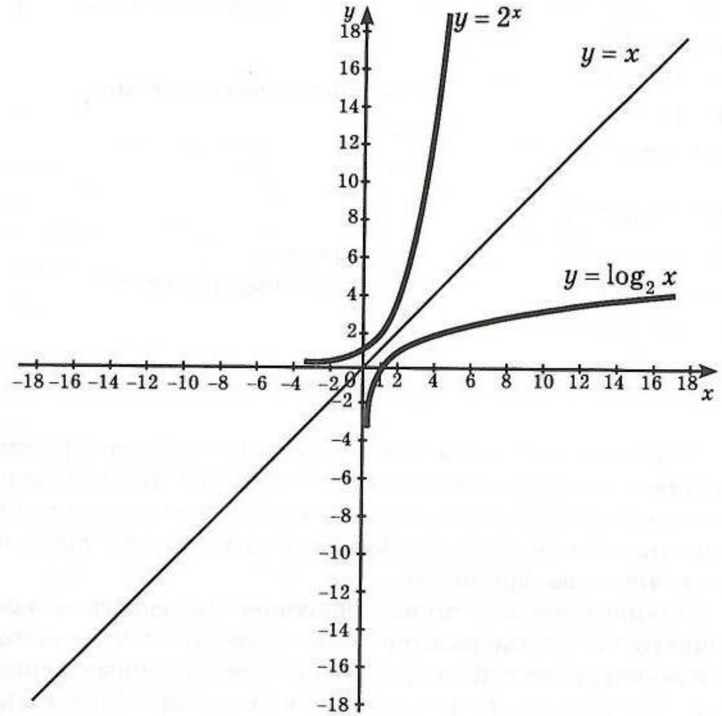
Если функция f такова, что каждому значению $y_0 \in E$ соответствует только одно значение $x \in D$, то эту функцию называют обратимой. Для такой функции уравнение $y = f(x)$ можно при любом y однозначно разрешить относительно x, т. е. каждому $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$. Это соответствие определяет функцию, которую называют обратной к функции f и обозначают символом f^{-1}.

Пусть $g = f^{-1}$. Тогда:

- $D(g) = E(f)$, $E(g) = D(f)$;
- для любого $x \in D$, $g(f(x)) = x$;
- для любого $x \in E$, $f(g(x)) = x$;
- графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Примеры обратных функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$, $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ на интервале $x \in [0; +\infty)$.

На рисунке представлены графики обратных функций.



Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает (строго убывает) на отрезке $[a; b]$, то на отрезке $[f(a); f(b)]$ определена функция $x = g(y)$, обратная к f, непрерывная и строго возрастающая (строго убывающая).

Элементарные функции и их классификация

К основным элементарным функциям относятся следующие:

$y = x^a$ — степенная

$y = a^x$ $(a > 0)$ — показательная

$y = \log_a(x)$ $(a > 0,\ a \neq 0)$ — логарифмическая

$$\left.\begin{array}{l} y = \sin x \\ y = \cos x \\ y = \operatorname{tg} x \\ y = \operatorname{ctg} x \end{array}\right\} \text{— тригонометрические}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ y = \arccos x \\ y = \operatorname{arctg} x \\ y = \operatorname{arcctg} x \end{array}\right\} \text{— обратные тригонометрические}$$

$y = C$, $C = \text{const}$ — постоянная

Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется *просто элементарной* функцией.

Элементарные функции получают посредством конечного числа арифметических операций и конечного числа суперпозиций из простейших элементарных функций. Например, $f(x) = x^2 + 5\sin 3x$, $f(x) = \ln(\cos x)$, $f(x) = \sin(\ln x) + e^{\arcsin\sqrt{x}}$.

С помощью элементарных функций удается достаточно точно описать самые разнообразные физические процессы и явления. В то же время элементарные функции весьма просты, поскольку они строятся на базе двенадцати перечисленных в таблице простейших элементарных функций, свойства которых известны. Все это делает класс элементарных функций главным объектом изучения в курсе математического анализа.

Элементарные функции обычно делят на классы: алгебраические и трансцендентные функции.

Алгебраическими называются функции, заданные с помощью суперпозиций рациональных функций, степенных с рациональными показателями и четырех арифметических действий. Их можно разделить на три группы.

1. *Многочлены (полиномы)* — это функции вида

$$y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x^1 + K + a_n x^n .$$

Если $a_n \neq 0$, то число n называется степенью данного полинома. Например, $y = 2 - 5x + x^3$. Степень многочлена равна 3.

При $n = 1$ многочлен первой степени и называется линейной функцией. Например, $y = 2x - 4$.

2. *Дробно-рациональные* функции:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$ где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

3. *Иррациональные* функции — такие, которые содержат переменную под знаком корня.

Например: $y = \sqrt{x}$.

Трансцендентными функциями называются элементарные функции, не являющиеся алгебраическими, записанные буквенными символами. К ним относятся: показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции.

Классификация функций представлена на схеме.

Задания для самостоятельной работы

№ 35

Постройте графики функций и перечислите их свойства.

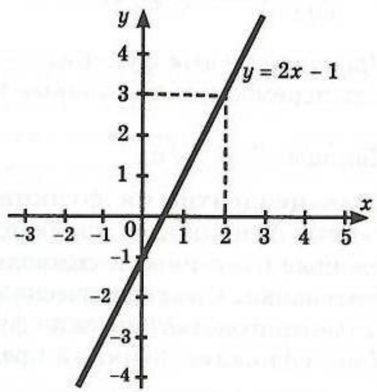
а) $y = 2x - 1$;

б) $y = 4x - x^2$, $x \in [-1; 5]$.

Решение:

а) Графиком функции $y = 2x - 1$ является прямая, которая проходит через две точки:

x	0	2
y	–1	3



Свойства функции $y = 2x - 1$:

1) $D(y) = R$.
2) $E(y) = R$.
3) Функция возрастает на всей области определения.
4) Функция общего вида.
5) Функция не периодическая.
6) Функция неограниченная.
7) Функция непрерывная.

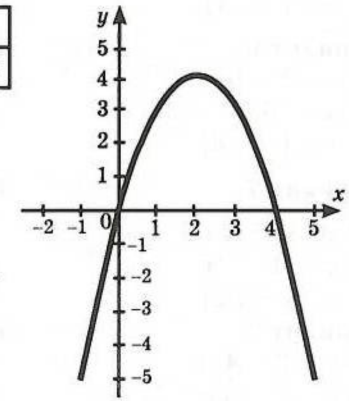
б) Графиком функции $y = 4x - x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз, так как $a = -1 < 0$.
$a = -1$, $b = 4$, $c = 0$.
Вершина параболы $(x_0; y_0)$, где

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = 2 \text{ ; } y_0 = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4.$$

Значит, координаты вершины (2; 4).

Вычислим координаты контрольных точек и занесем их в таблицу.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	–5	0	3	4	3	0	–5



На рисунке график функции $y = 4x - x^2$.

Свойства функции $y = 4x - x^2$:

1) $D(y) = [-1; 5]$.
2) $E(y) = [-5; 4]$.
3) Функция возрастает при $x \in [-1; 2]$, функция убывает при $x \in [2; 5]$.
4) Функция общего вида (ни четная, ни нечетная).
5) Функция ограниченная, $M = 5$.
6) Функция не периодическая.
7) Функция непрерывная.

№ 36

Постройте графики функций и перечислите их свойства.

Вариант 1.

а) $y = 2 - 3x$;

б) $y = -x^2 + 2x$,
$x \in [-1; 3]$.

Вариант 2.

а) $y = 5 - 2x$;

б) $y = 3 - 2x - x^2$,
$x \in [-4; 2]$.

Вариант 3.

а) $y = 2 - 4x$;

б) $y = x^2 - 4x + 1$,
$x \in [-1; 5]$.

Вариант 4.

а) $y = 2x - 3$;

б) $y = -x^2 + 6x$,
$x \in [-1; 4]$.

Вариант 5.
а) $y = 3x - 1$;
б) $y = x^2 - 2x + 4$,
$x \in [-1; 4]$.

Вариант 6.
а) $y = 2 - 6x$;
б) $y = -0{,}5x^2 + 2x$,
$x \in [-1; 3]$.

Вариант 7.
а) $y = 5 - 2x$;
б) $y = 3 - 2x - x^2$,
$x \in [-4; 2]$.

Вариант 8.
а) $y = 2 - 4x$;
б) $y = x^2 - 4x + 1$,
$x \in [-1; 5]$.

Вариант 9.
а) $y = 3x - 3$;
б) $y = -0{,}5x^2 + 6x$,
$x \in [-1; 4]$.

Вариант 10.
а) $y = 4x - 2$;
б) $y = x^2 - 2x - 2$,
$x \in [-1; 4]$.

Вариант 11.
а) $y = 2 - x$;
б) $y = -2x^2 + 2x$,
$x \in [-3; 3]$.

Вариант 12.
а) $y = 5 - 3x$;
б) $y = 3 - 4x - x^2$,
$x \in [-4; 2]$.

Вариант 13.
а) $y = 2 - 3x$;
б) $y = x^2 - 4x + 1$,
$x \in [-1; 5]$.

Вариант 14.
а) $y = 2x - 3$;
б) $y = -x^2 + 8x$,
$x \in [-2; 4]$.

Вариант 15.
а) $y = 3x - 4$;
б) $y = x^2 - 2x + 1$,
$x \in [-2; 4]$.

Вариант 16.
а) $y = 2 - 5x$;
б) $y = -x^2 + 8x$,
$x \in [-3; 3]$.

Вариант 17.
а) $y = 7 - 2x$;
б) $y = 4 - 2x - x^2$,
$x \in [-4; 2]$.

Вариант 18.
а) $y = 6 - 4x$;
б) $y = x^2 - 8x + 1$,
$x \in [-1; 5]$.

Вариант 19.
а) $y = 4x - 3$;
б) $y = -x^2 + 10x$,
$x \in [-2; 4]$.

Вариант 20.
а) $y = 5x - 2$;
б) $y = 3x^2 - 6x + 4$,
$x \in [-2; 4]$

Вариант 21.
а) $y = x - 4$;
б) $y = x^2 - 4x + 1$,
$x \in [0; 7]$.

Вариант 22.
а) $y = -x + 4$;
б) $y = -x^2 + 2x - 5$,
$x \in [-3; 3]$.

Вариант 23.
а) $y = 2x - 1$;
б) $y = -2x^2 + 4x - 5$,
$x \in [-1; 5]$.

Вариант 24.
а) $y = 3x - 2$;
б) $y = 2x^2 - 4x + 1$,
$x \in [-2; 4]$.

Вариант 25.
а) $y = -x + 5$;
б) $y = 6 - x^2$,
$x \in [-3; 3]$.

Вариант 26.
а) $y = x - 6$;
б) $y = x^2 - 4x + 2$,
$x \in [0; 6]$.

Вариант 27.
а) $y = -2x + 3$;
б) $y = -x^2 + 2x - 2$,
$x \in [-3; 3]$.

Вариант 28.
а) $y = 4x - 4$;
б) $y = -x^2 + 6x - 3$,
$x \in [-1; 5]$.

Вариант 29.
а) $y = x + 6$;
б) $y = 2x^2 - 8x + 2$,
$x \in [-2; 4]$.

Вариант 30.
а) $y = -x + 3$;
б) $y = 5 - x^2$,
$x \in [-3; 3]$.

Вариант 31.
а) $y = -x - 4$;
б) $y = 2x^2 - 6x + 1$,
$x \in [0; 6]$.

Вариант 32.
а) $y = -2x + 6$;
б) $y = -2x^2 + 4x - 3$,
$x \in [-3; 3]$.

Вариант 33.
а) $y = 3x - 5$;
б) $y = -4x^2 + 4x - 5$,
$x \in [-1; 5]$.

Вариант 34.
а) $y = 6x - 3$;
б) $y = 2x^2 - 4x + 2$,
$x \in [-2; 4]$.

Вариант 35.
а) $y = -2x + 5$;
б) $y = 10 - x^2$,
$x \in [-3; 3]$.

Вариант 36.
а) $y = 5x - 4$;
б) $y = 2x^2 - 8x + 1$,
$x \in [0; 6]$.

Вариант 37.
а) $y = -2x + 6$;
б) $y = -x^2 + 6x - 5$,
$x \in [-3; 3]$.

Вариант 38.
а) $y = x - 3$;
б) $y = -2x^2 + 4x - 2$,
$x \in [-1; 5]$.

Вариант 39.
а) $y = 2x - 4$;
б) $y = 2x^2 - 2x + 3$,
$x \in [-2; 4]$.

Вариант 40.
а) $y = -x + 7$;
б) $y = 7 - x^2$,
$x \in [-3; 3]$.

№ 37.

Используя таблицу показаний, постройте графики температуры, пульса и артериального давления на температурном листе. Отмечайте только показания утра.

Условные обозначения: П — пульс; АД — артериальное давление; Т° — температура; у — утро; в — вечер.

№ карты | ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ЛИСТ | № палаты

Фамилия, и., о. больного

Дата																														
День болезни																														
День пребыв. в стацион.			15		16		17		18		19		20		21		22		23		24		25		26		27		28	
П	АД	Т°	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в	у	в
90	125	38																												
80	100	37																												
70	75	36																												
60	50	35																												
Дыхание																														
Вес																														
Выпито жидкости																														
Суточное к-во мочи																														
Стул																														
Ванна																														

Таблица показаний к температурному листу

День	15	16	17	18	19	20	21
Т°	38,7	38,1	37,5	37,5	37,6	37,9	37,2
АД	120/80	110/70	110/70	100/60	120/90	110/70	100/60
П	75	72	70	72	68	65	62

День	22	23	24	25	26	27	28
Т°	36,8	36,9	36,5	36,7	36,6	36,5	36,6
АД	110/80	115/75	120/80	110/75	115/65	100/60	95/60
П	64	66	75	72	70	68	65

Вопросы по теме

1. *Что такое функция?*
2. *Перечислите основные свойства функций.*
3. *Перечислите способы задания функций.*
4. *Что такое область определения функции?*
5. *Что такое область значений функции?*
6. *Какие виды функций вы знаете?*
7. *Дайте определение непрерывности функции.*
8. *Какая функция называется обратной?*
9. *Графиком какой функций является прямая? парабола?*
10. *На какие виды функции делятся по четности?*

Тема 1.3. Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала

Термины

- Артериальное давление
- Газообмен в легких
- Диастолическое артериальное давление
- Систолическое артериальное давление
- Дополнительный объем вдоха
- Дыхательный объем
- Минутный объем легких
- Жизненная емкость легких
- Резервный объем вдоха/выдоха
- Частота дыхательных движений
- Остаточный объем легких
- Частота сердечных сокращений
- Ударный объем крови
- Минутный объем крови
- Пропорциональность развития ребенка
- Антропометрические индексы
- Индекс массы тела
- Объемный метод расчета питания
- Калорийный метод расчета питания

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Жизненная емкость легких

Артериальное давление — давление крови на стенки артерий, изменяется в зависимости от фазы цикла сокращения сердца. Оно зависит от силы сокращения сердца, притока крови в артериальную систему, состояния стенок сосудов, вязкости крови и многих других факторов. Различают артериальное давление *систолическое* — СД (максимальное), *диастолическое* — ДД (минимальное) и *пульсовое*: ПД = СД − ДД. Вычисляют также *среднее динамическое* давление: СДД = ПД/3 + ДД.

Газообмен в легких — происходит в три этапа:

1) внешнее, или легочное, дыхание — процесс обмена газами O_2 и CO_2 между легкими и атмосферой;

2) транспортировка газов кровью;

3) тканевое дыхание — газообмен в тканях, в результате чего потребляется кислород, образуется АТФ (аденозинтрифосфат) и углекислый газ.

Иногда выделяют еще один, самый начальный этап дыхания — вентиляцию, т. е. движение газов между атмосферой и дыхательной поверхностью легких.

При вдохе легкие заполняются воздухом, который содержит 79% азота, 20,97 кислорода и 0,03% углекислого газа. Так как давление атмосферного воздуха равно 760 мм рт. ст., то при указанных концентрациях газов во вдыхаемом воздухе парциальное давление кислорода составляет около 159 мм рт. ст. (≈ 21% от 760), азота — около 600 мм рт. ст. (79% от 760), углекислого газа — около 0,2 мм рт. ст. (0,03% от 760). Парциальным давлением газа называется та часть общего давления, которая приходится на долю этого газа в газовой смеси.

При выдохе воздух содержит около 16% кислорода и 4% углекислого газа.

Мы делаем 1000 вдохов в час, 24 000 за сутки, 9 млн за год, а на протяжении жизни в среднем около 650 млн. При этом организм производит за 70 лет около тонны радикалов кислорода!

Жизненная емкость легких (ЖЕЛ) — максимальный объем воздуха, который можно выдохнуть после максимального вдоха. ЖЕЛ равна сумме ДПО, ДО, РО. ЖЕЛ является показателем «растяжимости» легких и грудной клетки. Величина ЖЕЛ — 4000–5000 мл у мужчин и 2500–3300 мл у женщин. При нагрузке может увеличиваться за счет различных механизмов, в частности за счет повышения тонуса мышц, участвующих в акте дыхания.

Диастолическое артериальное давление (ДАД) характеризует давление в крупных артериальных сосудах во время *диастолы* сердца, ближе к ее завершению. Величина ДАД составляет 60–90 мм. рт. ст. и зависит в основном от состояния тонуса стенок артериальных сосудов, определяющих ***общее периферическое***

сопротивление сосудов и мало зависит от изменений УОК. ДАД при физических нагрузках чаще уменьшается, однако по абсолютным значениям — в значительно меньшей степени, чем изменяется САД.

Дополнительный объем вдоха (ДПО) — объем воздуха, который можно вдохнуть дополнительно при максимальном усилии после спокойного вдоха. Величина ДПО — 1800–2500 мл у мужчин и 1300–1600 мл у женщин. В динамике функционального состояния ДПО может изменяться в зависимости от изменений ДО.

Дыхательный объем (ДО) — объем воздуха, вдыхаемый при обычном спокойном (не усиленном) вдохе и выдыхаемый при обычном спокойном (не усиленном) выдохе. Дыхательный объем составляет в среднем 300–500 мл у взрослых мужчин и 300–400 мл у женщин. При нагрузке ДО может увеличиваться до 1500–2000 мл и 1300–1500 мл соответственно за счет уменьшения *дополнительного объема вдоха и резервного объема выдоха*. Для расчетов относительных изменений вместо ДО используется показатель амплитуды дыхания (АД), в свою очередь рассчитываемый из электрограммы экскурсии грудной клетки. Амплитуда дыхания равняется разности между максимумом вдоха и минимумом выдоха.

Минутный объем крови (МОК) — количество крови, перекачиваемое сердцем за одну минуту. МОК вычисляется как произведение УОК на ЧСС.

Минутный объем легких (МОЛ) — объем воздуха, проходящий через легкие в течение одной минуты. Рассчитывается как произведение ЧДД и АД.

Резервный объем выдоха (РО) — максимальный объем воздуха, который человек может выдохнуть дополнительно после спокойного выдоха. Величина — 1300–1800 мл у мужчин и 900–1300 мл у женщин.

Систолическое артериальное давление (САД) — давление, создаваемое сердцем в артериальном русле в момент систолы желудочков. САД является общей характеристикой работы сердечно-сосудистой системы. Величина САД зависит от состояния артериального сосудистого русла (его *общего периферического сопротивления*) и величины систолического выброса — ударного объема крови.

У человека в покое систолическое давление — 90–140 мм рт. ст. Его значение сильно зависит от индивидуальных особенностей человека, от его конституции, возраста, пола и т.д. У людей с астенической конституцией, как правило, САД несколько ниже, чем у людей с гиперстенической. С возрастом САД повышается. У мужчин САД несколько выше, чем у женщин. При физических нагрузках САД увеличивается в первую очередь за счет возрастания объема выбрасываемой крови и роста сопротивления сосудистого русла (сокращение гладких мышц сосудистой стенки — сужение диаметра периферических сосудов). Степень изменения САД при физических нагрузках отражает уровень резервных возможностей сердечно-сосудистой системы и пути ее адаптации. При нагрузке у здорового человека САД может достигать 160–200 мм рт. ст.

Систолический (ударный) объем крови (УОК) — объем крови, поступающий в аорту при одном сокращении сердца (*систоле*). УОК показывает величину сердечного выброса и является характеристикой производительности сердца как насоса.

Вычислительный способ определения ударного объема крови (УОК):

$$\text{УОК} = 90{,}97 + (0{,}54 \cdot (\text{САД} - \text{ДАД})) - \\ - (0{,}57 \cdot \text{ДАД}) - (0{,}61 \cdot \text{возраст}).$$

Величина УОК зависит от объема крови, поступившего в сердце во время *диастолы*, и степени растяжения волокон миокарда (*закон Старлинга*), а также от влияний на силу сокращения со стороны *вегетативной нервной системы*. Положительное влияние на УОК оказывают гуморальные факторы, в частности, гормоны надпочечников: адреналин, норадреналин, дофамин. УОК зависит от возраста, пола, размеров сердца и степени адаптированности к физическим нагрузкам.

Например, в покое в положении лежа у нетренированных молодых людей УОК составляет 80–95 мл (ЧСС — 60–80 уд./мин), у спортсменов — 100–120 мл (ЧСС — 40–45 уд./мин). Максимально систолический объем может достигать 180–200 мл.

Степень изменения УОК при физических нагрузках по сравнению с покоем отражает уровень резервных возможностей сердца. Ведущим механизмом увеличения УОК при физических нагрузках является усиление *симпатических* и снижение *парасимпатических* влияний.

При физических нагрузках вместе с ростом потребления кислорода возрастает и УОК, но до пределов, обеспеченных возможностями растяжимости и сократимости миокарда. При этом умеренные физические нагрузки могут вызывать большее увеличение УОК, чем значительные, поскольку при значительных нагрузках сильно возрастает ЧСС, что ведет к резкому снижению времени диастолы и кровенаполнения желудочков.

Частота дыхательных движений (ЧДД) — количество дыхательных циклов «вдох-выдох» за одну минуту. Средняя ЧДД в состоянии физического покоя — 12–16 в мин.

Частота сердечных сокращений (ЧСС, частота пульса) — число сокращений сердца в минуту. ЧСС является одной из основных характеристик состояния сердечно-сосудистой системы. Она различается в зависимости от возраста, пола и индивидуальных особенностей *симпатической* и *парасимпатической* регуляции сердечно-сосудистой деятельности. ЧСС зависит от состояния самого сердца, процессов саморегуляции, системной и центральной регуляции и уровня нагрузки. Степень изменения ЧСС при физических нагрузках имеет, в определенных пределах, прямую зависимость от величины выполняемой нагрузки. Увеличение ЧСС при физических нагрузках определенного диапазона интенсивностей коррелирует с ростом потребления кислорода, связано с усилением симпатического влияния на сердце и отражает тренированность сердца.

В норме ЧСС у взрослого человека 60–80 в минуту. Увеличению ЧСС свыше 80 ударов в минуту (тахикардии) соответствует повышенная частота пульса (тахисфигмия). Уменьшению ЧСС менее 60 ударов в минуту (брадикардии) соответствует урежение пульса (брадисфигмия).

Рекомендации к выполнению задачи.

1) Жизненная емкость легких (ЖЕЛ) — емкость легких, соответствующая максимальному объему воздуха, вдыхаемому или выдыхаемому данным человеком одномоментно. Это один из показателей физического развития. ЖЕЛ может быть достаточно точно рассчитана исходя из основных антропометрических размеров грудной клетки. ЖЕЛ — это количество воздуха, которое индивидуум способен выдохнуть после максимально глубокого вдоха. Жизненная емкость легких измеряется с помощью спирометра. Обследуемый предварительно 2–3 раза делает глубокий вдох и выдох, а затем, сделав максимальный вдох, плотно берет в рот мундштук спирометра и, зажав свободной рукой нос, равномерно выдыхает воздух до отказа. Измерение проводится 3 раза, учитывается наибольший показатель.

ЖЕЛ зависит от пола, возраста, размеров тела, состояния тренированности.

Она бывает в следующих пределах: у мужчин — 3,5–5,0 л; у женщин — 2,5–4,0 л. У спортсменов эта величина может достигать: у мужчин 7,0 л и более, у женщин — 5,0 л и более. В отдельных случаях у людей очень высокого роста ЖЕЛ может достигать 9,0 л.

Существует вычислительный метод определения должной «нормальной» жизненной емкости легких, который заключается в следующем.

Измерьте свой рост без обуви и массу без одежды (если масса измерена в одежде, то ее следует уменьшить на 2 кг для мужчин и 1,5 кг для женщин, летом эта величина уменьшается примерно в 2 раза). А затем, подставив полученные значения в формулу, рассчитайте теоретический объем — жизненную емкость легких.

Расчетные формулы для должной жизненной емкости легких (I способ):

Мальчики 8–12 лет —

$$\text{ДЖЕЛ (л)} = \text{Рост (см)} \cdot 0{,}052 - \text{Возраст (лет)} \cdot 0{,}022 - 4{,}6;$$

Мальчики 13–16 лет —

$$\text{ДЖЕЛ (л)} = \text{Рост (см)} \cdot 0{,}052 - \text{Возраст (лет)} \cdot 0{,}022 - 4{,}2;$$

Девочки 8–16 лет —

ДЖЕЛ (л) = Рост (см) · 0,041 –
– Возраст (лет) · 0,018 – 3,7;

Взрослые мужчины —

ДЖЕЛ (л) = Рост (см) · 0,052 –
– Возраст (лет) · 0,022 – 3,6;

Взрослые женщины —

ДЖЕЛ (л) = Рост (см) · 0,041 –
– Возраст (лет) · 0,018 – 2,68.

При исследовании деятельности дыхательной системы различают внешнее и внутреннее дыхание. Под внешним понимают происходящий через легочные капилляры газообмен между кровью и наружным воздухом, под внутренним — процессы, обеспечивающие газообмен между кровью и тканями организма, а также окислительные процессы, идущие в тканях.

Для изучения дыхания используют такие методики:

1. Пневмография — запись дыхательных движений (оценка их ритма, частоты, амплитуды);
2. Спирометрия — определение объема легочного воздуха;
3. Измерение газообмена — определение величины поглощения организмом кислорода и выделения углекислоты, т.е. легочный газообмен;
4. Оксигемометрия — определение степени насыщения артериальной крови кислородом, т.е. степени артериализации крови, показателем которой является количество гемоглобина в крови, находящегося там в виде оксигемоглобина.

Нас в первую очередь интересуют показатели внешнего дыхания: ритм, частота и глубина дыхательных движений, минутный объем дыхания, легочная вентиляция, жизненная емкость легких. Рассмотрим метод спирометрии получения таких данных. Создатель этого метода Гутчинсон разработал классификацию объемов легочного воздуха.

Согласно этой классификации различают следующие объемы:

— дыхательный воздух (дыхательный объем, ДО) — объем воздуха, вдыхаемого и выдыхаемого при нормальных вдохе и выдохе; его величина составляет 300–900 мл. Этот объем является мерой глубины дыхания;

— дополнительный воздух (резервный объем вдоха, $РО_{вд}$) — объем воздуха, вдыхаемого при максимально глубоком вдохе; его величина составляет 1500–2000 мл;

— резервный воздух (резервный объем выдоха, $РО_{выд}$) — объем воздуха, выдыхаемого при максимально глубоком выдохе; его величина — 1500–2000 мл. Резервный воздух поддерживает легкие в определенной степени расширения;

— остаточный воздух (остаточный объем легких, ООЛ) — объем воздуха, остающегося в легких после максимального выдоха. Его объем у здорового мужчины среднего возраста составляет 1000–1500 мл, возрастая к старости до 2000–2500 мл. Он может быть измерен у человека методом ингаляции (вдыхания) индифферентных газов.

Объем максимального выдоха, произведенного после максимального вдоха, называется жизненной емкостью легких (ЖЕЛ) и представляет собой сумму

$$ДО + РО_{вд} + РО_{выд}. \qquad \text{(II способ)}$$

Для мужчины среднего роста ЖЕЛ варьирует в пределах 3500–5000 мл и более, для женщин характерны более низкие значения (на 25% меньше).

Сумма ЖЕЛ и ООЛ составляет общую емкость легкого (ОЕЛ), характеризующую степень анатомического развития органа.

Ориентировочно должные величины ЖЕЛ (мл) можно получить, умножая рост мужчины на 25, женщины — на 20 (III способ).

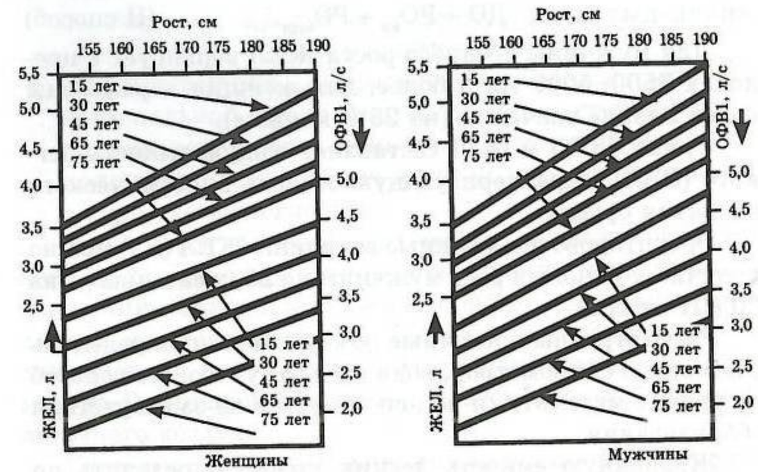
Рассмотренные легочные объемы можно определить с помощью спирометров, водного или сухого, этот способ на уроках математики не используется из-за отсутствия оборудования.

Жизненную емкость легких можно определить по готовым таблицам (IV способ):

Средние величины жизненной емкости легких у школьников и студентов

Возраст (в годах)	Жизненная емкость легких (л)		Возраст (в годах)	Жизненная емкость легких (л)	
	Мальчики	Девочки		Мальчики	Девочки
7	1,4	1,3	17	3,9	2,9
8	1,5	1,3	18	4,1	3,0
9	1,7	1,5	19	4,2	3,1
10	2,0	1,7	20	4,3	3,3
11	2,1	1,8	21	4,5	3,4
12	2,2	2,0	22	4,6	3,5
13	2,3	2,2	23	4,7	3,5
14	2,8	2,5	24	4,8	3,6
15	3,3	2,7	25	4,9	3,6
16	3,8	2,8	26	5,0	3,7

Иногда используется метод «грубой» оценки соответствия ЖЕЛ возрасту и росту обследуемого по номограмме (V способ).



Измерение производится следующим образом: провести вертикальную линию от значения роста испытуемого до пересечения с наклонной линией, соответствующей возрасту пациента в верхней части соответствующей номограммы, провести влево горизонтальную линию до шкалы ЖЕЛ и записать полученное значение должного ЖЕЛ.

ОФВ1 — объем форсированного выдоха, величина показателя ЖЕЛ должна быть больше или равна ОФВ1.

2) Мерилом легочной вентиляции является минутный объем дыхания (МОД):

МОД = ДО · ЧД, где ЧД – частота дыхания (количество вдохов/выдохов в минуту).

Частота дыхания у нормального здорового человека варьирует от 8 до 28 циклов в минуту, возрастая при работе до 40.

Часто подсчет дыхательных движений производится путем визуального наблюдения за дыхательными экскурсиями грудной клетки. МОД в покое у взрослого человека составляет 5–9 л.

3) Вычислительный способ определения ударного объема крови (УОК):

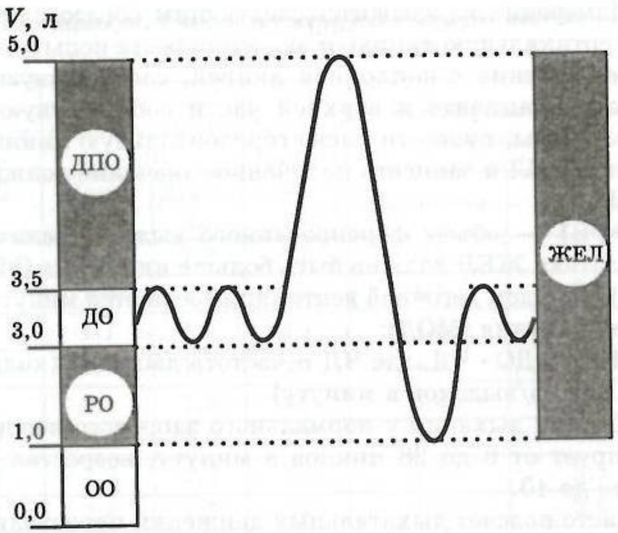
УОК = 90,97 + (0,54 · (САД — ДАД)) – (0,57 · ДАД) – – (0,61 · возраст),

где систолический (ударный) объем крови (УОК) — объем крови, поступающий в аорту при одном сокращении сердца (систоле), САД — систолическое артериальное давление, ДАД – диастолическое артериальное давление.

Минутный объем крови (МОК) — количество крови, перекачиваемое сердцем за одну минуту. МОК вычисляется как произведение УОК на ЧСС. Для взрослого человека приблизительно равен 5 л.

МОК = УОК · ЧСС, где ЧСС — частота сердечных сокращений (пульс).

На рисунке показана схема легочных объемов человека.



Обозначения:

ЖЕЛ – жизненная емкость легких; ДПО – дополнительный объем вдоха; ДО – дыхательный объем; РО – резервный объем выдоха; ОО – остаточный объем легких.

Рассмотрим пример решения задачи.

Предположим, мы обследуем женщину 30 лет, ее рост 165 см, вес 60 кг.

1) ЖЕЛ = *Рост (см)* · 0,041 – *Возраст (лет)* · 0,018 – 2,68 = 165 · 0,041 – 30 · 0,018 – 2,68 = 6,765 – 0,45 – – 2,68 = 3,635 (л);

2) ЖЕЛ = ДО + $РО_{вд}$ + $РО_{выд}$ = 500 + 1500 + 1500 = = 3500 мл = 3,5 л;

3) ЖЕЛ = Рост · 20 = 165 · 20 = 3300 мл = 3,3 л;

4) по данным таблицы ЖЕЛ = 3,7 л;

5) по номограмме ЖЕЛ = 3,7 л.

6) МОД = ДО · ЧД = 500 · 25 = 125 000 мл = 12,5 л.

7) УОК = 90,97 + (0,54 · (САД – ДАД)) – (0,57 · ДАД) – – (0,61 · возраст) = 90,97 + 0,54 · (120 – 80) – – 0,57 · 80 – 0,61 · 30 = 48,67 мл;

8) МОК = УОК · ЧСС = 48,67 · 70 = 3406,9 мл = 3,4 л.

Оценка пропорциональности развития ребенка

При оценке физического развития ребенка необходимо знать его рост, массу тела, пропорции развития отдельных частей тела.

Степень физического развития зависит как от генетических особенностей, так и от сложного комплекса социальных условий. Различают эндогенные и экзогенные причины (факторы), влияющие на массу тела, рост и другие показатели уже после рождения.

Эндогенные причины находятся в зависимости от того влияния, которое оказывают на увеличение роста и массы тела эндокринные железы. В самом раннем периоде это влияние исходит из вилочковой железы, с конца первого года жизни — из щитовидной железы и с 3–4 лет — из гипофиза. Уровень гормонов, участвующих в процессе роста, и чувствительность тканей к их действию определяются генотипом. Гормонами, способствующими росту, являются: соматотропный гормон гипофиза (СТГ), гормоны щитовидной железы и инсулин. СТГ стимулирует хондрогенез, а тиреоидные гормоны больше влияют на остеогенез. Реализации многих эффектов гормона роста способствует комплекс инсулиноподобных ростовых факторов 1, 2 и 3. Роль СТГ сравнительно мало сказывается на росте ребенка до 2–3 лет и особенно важна с 3 до 11 лет.

Экзогенные факторы — это те условия, в которые ребенок попадает после рождения. Это прежде всего питание (пластический и энергетический материал). Количественно и качественно недостаточное питание в первую очередь тормозит нарастание массы тела, а затем роста.

Определенную роль приписывают ультрафиолетовым лучам, в связи с чем нарастание массы тела и роста имеет сезонные колебания. Отводится также некоторая роль климатическим и географическим условиям. На рост ребенка влияют движения, которые увеличивают рост костей, усиливают обмен веществ.

Физическое развитие служит показателем функциональной зрелости организма. Здесь рассмотрены только численные показатели без учета статических функций, молочного прорезывания зубов, нервно-психического развития.

Рост ребенка

Наиболее стабильным показателем физического развития является рост ребенка. Он определяет абсолютную длину тела и соответственно этому увеличение размеров тела, развитие, созревание его органов и систем, формирование функций в тот или иной период времени.

На протяжении всей жизни ребенка процесс роста протекает неравномерно, то усиливаясь, то замедляясь. Оценку антропометрических показателей производят преимущественно двумя способами: параметрическим, или сигмальным, и непараметрическим — центильным. Параметрическая шкала включает в себя среднюю арифметическую («норму») и отклонения от нее, измеряемые величиной сигмы (среднего квадратического отклонения). Центильные таблицы показывают количественные границы признака у определенной доли или процента (центиля) детей данного возраста и пола. За нормальные величины приняты значения в интервалах 25-го, 50-го, 75-го центиля (желательно оценивать по 50-му центилю).

Таблица для оценки длины тела мальчиков 0–12 месяцев

Возраст (мес.)	Центили						
	3	10	25	50	75	90	97
	Центильные интервалы						
1	2	3	4	5	6	7	8
0	46,5	48,0	49,8	51,3	52,3	53,5	55,0
1	49,5	51,2	52,7	54,5	55,6	56,5	57,3
2	52,6	53,8	55,3	57,3	58,2	59,4	60,9
3	55,3	56,5	58,1	60,0	60,9	62,0	63,8
4	57,5	58,7	60,6	62,0	63,1	64,5	66,3
5	59,9	61,1	62,3	64,3	65,6	67,0	68,9
6	61,7	63,0	64,8	66,1	67,7	69,0	71,2
7	63,8	65,1	66,3	68,0	69,8	71,1	73,5
8	65,5	66,8	68,1	70,0	71,3	73,1	75,3

Окончание

Возраст (мес.)	3	10	25	50	75	90	97
9	67,3	68,2	69,8	71,3	73,1	75,1	77,2
10	68,8	69,1	71,2	73,0	75,1	76,9	78,8
11	70,1	71,3	72,6	74,3	76,2	78,0	80,3
12	71,2	72,3	74,0	75,5	77,3	79,7	81,7

Таблица для оценки длины тела девочек 0–12 месяцев

Возраст (мес.)	Центили						
	3	10	25	50	75	90	97
	Центильные интервалы						
1	2	3	4	5	6	7	8
0	45,8	47,5	49,8	50,7	52,0	53,1	53,9
1	48,5	50,3	52,1	53,5	55,0	56,1	57,3
2	51,2	53,3	55,2	56,8	58,0	59,3	60,6
3	54,0	56,2	57,6	59,3	60,7	61,8	63,6
4	56,7	58,4	60,0	61,2	62,8	64,0	65,7
5	59,1	60,8	62,0	63,8	65,1	66,6	68,0
6	60,8	62,5	64,1	65,5	67,1	68,8	70,0
7	62,7	64,1	65,9	67,5	69,2	70,4	71,9
8	64,5	66,0	67,5	69,0	70,5	72,5	73,7
9	66,0	67,5	69,1	70,2	72,0	74,1	75,5
10	67,5	69,0	70,3	71,9	73,2	75,3	76,8
11	68,9	70,1	71,5	73,0	74,7	76,5	78,1
12	70,1	71,4	72,8	74,1	75,8	78,0	79,6

Наибольшая энергия роста приходится на первую четверть года. У доношенных новорожденных рост колеблется от 46 до 60 см. В среднем — 48–52 см, но адаптивными показателями роста считаются — 50–52 см. Это означает, что адаптация во внутриутробном периоде произошла не только на организменном уровне, но и на уровне органном и ферментативном.

За первый год ребенок прибавляет в росте в среднем 25 см, так что к году его рост составляет в среднем 75–76 см. При правильном развитии ребенка месячная прибавка роста может колебаться в пределах ± 1 см, однако к 6 месяцам и к году эти колебания роста не должны превышать 1 см.

Прибавка роста и массы тела у детей первого года жизни

Возраст, мес.	Прибавка роста за месяц, см	Прибавка роста за истекший период, см	Месячная прибавка массы тела, г	Прибавка массы тела за истекший период, г
1	3	3	600	600
2	3	6	800	1400
3	2,5	8,5	800	2200
4	2,5	11	750	2950
5	2	13	700	3650
6	2	15	650	4300
7	2	17	600	4900
8	2	19	550	5450
9	1,5	20, 5	500	5950
10	1,5	22	450	6400
11	1,5	23, 5	400	6800
12	1,5	25	350	7150

Рост отражает особенности пластических процессов, протекающих в организме человека. Отсюда важность качественного питания, особенно содержания в нем достаточного количества сбалансированного полноценного белкового компонента и витаминов группы В, а также А, D, Е. Безусловно, «золотым стандартом» оптимального питания для детей до 1-го года является женское молоко. Дефицит некоторых пищевых компонентов избирательно нарушает процессы роста у детей. К ним относятся витамин А, цинк, йод. Отставание в росте могут вызывать различные хронические заболевания.

Измерения роста ребенка на первом году жизни производят на горизонтальном ростомере. Измерения производят два человека. Измеряющий находится с правой стороны ребенка. Помощник удерживает голову ребенка в горизонтальном положении, чтобы верхний край козелка уха и нижний край глазницы находились в одной плоскости, перпендикулярной доске ростомера.

Верхушечная часть головы должна прикасаться к вертикальной неподвижной планке. Руки ребенка вытянуты вдоль тела. Измеряющий легким надавливанием на колени ребенка левой рукой удерживает его ноги в выпрямленном положении, а правой рукой подвигает подвижную планку ростомера плотно к подошвенной стороне стоп, согнутых под прямым углом.

За второй год жизни ребенок вырастет на 12–13 см, за третий — 7–8 см.

При правильном развитии ребенка прибавка длины тела за месяц может колебаться от +1 до –1 см. За второй год прибавка длины тела составляет 11–12 см, за третий год жизни — 8 см, за четвертый — 6 см. К четырем годам рост ребенка достигает 100 см.

В дальнейшем (до 10 лет) для определения прибавки длины тела можно пользоваться формулой: длина тела ребенка Р = 100 см + 6 (П – 4), где П — число лет, 6 — средняя ежегодная прибавка длины тела, см. Наиболее интенсивный рост наблюдается в 5–7 лет и в период начала полового созревания.

Масса тела ребенка

В отличие от роста масса тела является довольно лабильным показателем, который сравнительно быстро реагирует и изменяется под влиянием самых различных причин. Особенно интенсивно прибавка в массе тела происходит в первую четверть года. Масса тела доношенных новорожденных колеблется от 2600 до 4000 г и в среднем равна 3–3,5 кг. Однако адаптивная масса тела составляет 3250–3650 г. В норме у большинства детей к 3–5-му дню жизни отмечается «физиологическая» убыль в массе до 5%. Это объясняется большей потерей воды при недостаточном количестве молока. Восстановление физиологической потери массы тела происходит максимум к 2 неделям.

Динамика массы тела характеризуется большей прибавкой в первые 6 месяцев жизни и меньшей к концу первого года. Масса тела ребенка к 4,5 месяца удваивается, к году утраивается, несмотря на то, что этот показатель может изменяться и зависит от питания, перенесенных заболеваний и т.д. Энергия нарастания массы тела с каждым месяцем жизни постепенно ослабевает.

Для определения массы тела в возрасте до года лучше использовать таблицу.

Исходя из данной таблицы прибавку массы тела ребенка за каждый последующий месяц жизни можно рассчитать, вычитая из прибавки предыдущего месяца (но только после 3-го месяца) 50 г, или по формуле $X = 800 - 50 \cdot n$, где 50 — ребенок прибавляет в массе тела на 50 г меньше за каждый последующий месяц жизни после 3-го месяца; n — число месяцев жизни ребенка минус три. Например, за десятый месяц жизни ребенок прибавляет в массе $800 - (50 \cdot 7) = 450$ г.

Существует и другое мнение, что средняя ежемесячная прибавка в массе тела в первом полугодии жизни составляет 800 г, во втором — 400 г. Однако следует подчеркнуть, что расчет по данным, приведенным в таблице, считается предпочтительнее (физиологичнее). Данные по оценке массы тела относительно роста (длина тела) для мальчиков и девочек в центильных интервалах приведены в таблицах.

В среднем к одному году масса тела ребенка равна 10–10,5 кг. Нарастание массы тела у грудных детей не всегда отличается такой закономерностью. Это зависит от индивидуальных особенностей ребенка и целого ряда внешних факторов. Дети с первоначальной малой массой тела дают относительно большие ежемесячные прибавки массы, и она удваивается и утраивается раньше, чем у детей более крупных. Дети, находящиеся на искусственном вскармливании сразу после рождения, удваивают свою массу тела приблизительно на месяц позднее детей, находящихся на естественном вскармливании. Масса тела — лабильный показатель, особенно у ребенка раннего возраста, и может меняться под влиянием различных условий иногда в течение дня. Поэтому масса тела является показателем текущего состояния организма в отличие от роста, который не сразу изменяется под влиянием различных условий и является более постоянным и устойчивым показателем. Отклонение массы тела от

нормы до 10% не считается патологией, однако детский врач должен анализировать эту потерю.

Далее представлены центильные таблицы для оценки массы тела ребенка.

Таблица для оценки массы тела (кг) по длине тела (мальчики)

	Центили						
Длина тела (в см)	3	10	25	50	75	90	97
	Центильные интервалы						
1	2	3	4	5	6	7	8
50	2,7	2,9	3,1	3,4	3,7	3,9	4,1
51	2,8	3,0	3,3	3,6	3,9	4,1	4,3
52	3,0	3,2	3,5	3,8	4,1	4,3	4,5
53	3,2	3,4	3,6	4,0	4,3	4,5	4,8
54	3,3	3,5	3,8	4,2	4,5	4,8	5,0
55	3,4	3,7	4,0	4,3	4,7	5,0	5,3
56	3,6	3,9	4,2	4,6	4,9	5,3	5,6
57	3,8	4,1	4,4	4,8	5,2	5,6	5,9
58	4,0	4,3	4,7	5,1	5,5	5,9	6,3
59	4,3	4,6	5,0	5,4	5,8	6,2	6,6
60	4,6	4,9	5,3	5,7	6,1	6,6	7,0
61	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,9	7,3
62	5,1	5,5	5,9	6,3	6,8	7,3	7,7
63	5,4	5,8	6,2	6,6	7,1	7,6	8,1
64	5,7	6,1	6,5	6,9	7,4	7,9	8,5
65	6,0	6,4	6,8	7,2	7,7	8,3	8,8
66	6,2	6,6	7,0	7,5	8,0	8,6	9,1
67	6,5	6,9	7,3	7,8	8,3	8,9	9,4
68	6,7	7,1	7,6	8,0	8,6	9,2	9,7
69	7,0	7,3	7,8	8,3	8,8	9,4	10,0
70	7,2	7,6	8,0	8,6	9,1	9,7	10,3
71	7,4	7,8	8,3	8,8	9,3	10,0	10,5
72	7,6	8,1	8,5	9,0	9,6	10,3	10,8
73	7,8	8,3	8,8	9,3	9,9	10,5	11,0
74	8,1	8,5	9,0	9,5	10,1	10,7	11,3
75	8,3	8,8	9,2	9,7	10,3	11,0	11,6

Окончание

Длина тела (в см)	3	10	25	50	75	90	97
76	8,5	9,0	9,4	10,0	10,6	11,2	11,8
77	8,8	9,2	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0
78	9,0	9,4	9,8	10,4	11,1	11,7	12,3
79	9,2	9,6	10,1	10,7	11,3	11,9	12,5
80	9,4	9,8	10,3	10,9	11,5	12,2	12,7
81	9,6	10,0	10,5	11,1	11,8	12,4	12,9

Таблица для оценки массы тела (кг) по длине тела (девочки)

Центили							
Длина тела (в см)	3	10	25	50	75	90	97
Центильные интервалы							
1	2	3	4	5	6	7	8
50	2,6	2,8	3,0	3,3	3,5	3,7	4,0
51	2,7	2,9	3,1	3,5	3,7	3,9	4,2
52	2,8	3,1	3,3	3,6	3,9	4,2	4,4
53	3,0	3,3	3,5	3,8	4,1	4,4	4,6
54	3,2	3,5	3,7	4,0	4,3	4,6	4,9
55	3,4	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,2
56	3,6	3,8	4,1	4,4	4,8	5,1	5,4
57	3,8	4,1	4,3	4,7	5,0	5,4	5,7
58	4,0	4,3	4,6	4,9	5,3	5,7	6,1
59	4,2	4,5	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4
60	4,4	4,7	5,1	5,5	6,0	6,3	6,8
61	4,6	4,9	5,3	5,8	6,2	6,7	7,2
62	4,8	5,2	5,6	6,0	6,5	7,0	7,5
63	5,1	5,4	5,9	6,3	6,8	7,4	7,9
64	5,4	5,7	6,2	6,6	7,1	7,7	8,2
65	5,7	6,0	6,5	6,9	7,4	8,1	8,6
66	6,0	6,3	6,8	7,2	7,8	8,4	8,9
67	6,2	6,6	7,1	7,5	8,2	8,7	9,2
68	6,5	6,9	7,4	7,8	8,4	8,9	9,5
69	6,7	7,2	7,6	8,1	8,7	9,2	9,8
70	7,0	7,4	7,9	8,4	9,0	9,5	10,1
71	7,2	7,7	8,1	8,7	9,2	9,8	10,3

Окончание

Длина тела (в см)	3	10	25	50	75	90	97
72	7,5	7,9	8,3	8,9	9,5	10,0	10,6
73	7,7	8,2	8,6	9,1	9,7	10,2	10,8
74	7,9	8,4	8,8	9,3	9,9	10,4	11,0
75	8,2	8,6	9,1	9,6	10,2	10,6	11,2
76	8,4	8,8	9,3	9,8	10,4	10,8	11,4
77	8,6	9,0	9,5	10,0	10,6	11,1	11,6
78	8,8	9,2	9,7	10,2	10,8	11,3	11,8
79	8,9	9,4	9,9	10,4	11,0	11,5	12,0
80	9,1	9,6	10,0	10,6	11,2	11,7	12,2
81	9,3	9,8	10,2	10,8	11,4	11,8	12,4

Масса тела — это лабильный показатель, который может изменяться под влиянием конституциональных особенностей, нервно-эндокринных и соматических нарушений; он также зависит от экзогенных причин (питание, режим). Наиболее интенсивная прибавка массы тела ребенка отмечается на первом году жизни и в пубертатном периоде.

Средняя масса тела новорожденных мальчиков 3494 г, девочек — 3348 г. Масса тела ребенка к 4–4,5 месяца удваивается, к году утраивается. В первый месяц жизни ребенок прибавляет 600 г, во второй и третий — по 800 г. Норму прибавки массы тела ребенка после третьего месяца за каждый последующий месяц жизни можно рассчитать, вычитая от прибавки предыдущего месяца 50 г, или по формуле

$$X = 800 - 50 \cdot (n - 3),$$

где X — ожидаемая ежемесячная прибавка массы тела, n — число месяцев.

Темп увеличения массы тела у детей после года ослабевает и в среднем составляет 2 кг ежегодно.

Ожидаемую массу тела ребенка до 10 лет можно рассчитать по формуле

Р = масса тела ребенка в 1 год + 2 кг $\cdot$ $(n - 1)$,

где Р — ожидаемая масса, n — число лет.

Массу тела ребенка старше 10 лет можно определить с помощью формулы И. М. Воронцова:

Масса тела детей старше 10 лет =
= Возраст · 3 + последняя цифра числа лет.

Пропорциональность развития ребенка

При оценке физического развития ребенка необходимо знать правильное соотношение между массой тела и ростом. Под массоростовым показателем (МРП) понимается отношение массы к росту, т.е. какая масса приходится на 1 см длины тела. В норме у новорожденных (МРП) составляет 60–75 г.

Кроме роста и массы тела, для оценки физического развития имеют значение правильные пропорции тела. Известно, что окружность груди у доношенных меньше окружности головы при рождении. Окружность головы у доношенных детей колеблется в достаточно широких пределах – от 33,5 до 37,5 см, в среднем равна 35 см. При анализе этих цифровых показателей следует учитывать рост и массу тела ребенка, а также соотношение окружности головы с окружностью грудной клетки. При сравнении следует учитывать, что при рождении голова не должна превышать окружность грудной клетки больше, чем на 2 см. В дальнейшем необходимо ориентироваться на темп прироста окружности головы. В первые 3–5 месяцев ежемесячная прибавка равна 1,0–1,5 см, а затем 0,5–0,7 см. К году окружность головы увеличивается на 10–12 см и достигает 46–47–48 см (в среднем 47 см).

У ребенка, родившегося с адаптивными показателями роста и массы тела, окружность головы составляет около 36 см. За первые 3 месяца жизни окружность головы должна «вырасти» на 4 см (т.е. в 3 месяца – 40 см). За последующие 3 месяца окружность головы увеличивается еще на 3 см и становится к 6 месяцам равной 43 см, а к году 46–48 см. Размеры большого родничка при рождении не должны превышать 2,5 × 3 см, 3 × 3 см.

Окружность головы измеряют при положении сантиметровой ленты сзади на уровне затылочного бугра, а спереди — над бровями.

Для характеристики физического развития ребенка большое значение имеет правильная оценка особенностей его грудной клетки, так как жизнедеятельность внутренних органов во многом зависит от формы и размеров последней. Нарастание окружности грудной клетки наиболее интенсивно происходит на первом году жизни, особенно в первые 6 месяцев.

У новорожденного окружность грудной клетки составляет 33–35 см. Ежемесячная прибавка на первом году жизни составляет в среднем 1,5–2 см в месяц. К году окружность грудной клетки увеличивается на 15–20 см, после чего энергия нарастания падает и окружность грудной клетки в среднем увеличивается к дошкольному возрасту на 3 см, а в дошкольном — на 1–2 см в год.

Для индивидуальной оценки физического развития ребенка важно знать периоды перекреста окружности головы и грудной клетки. У здоровых детей этот перекрест происходит приблизительно в 3–4 месяца, а детей, у которых в 5–7 месяцев не наступил перекрест, нужно брать на учет и анализировать у них динамику развития грудной клетки и головы. Более ранний перекрест может свидетельствовать о развивающейся микроцефалии, поэтому необходимо следить за сроками закрытия большого родничка. Большой родничок должен зарастать к концу первого года у 80% детей, у остальных детей — к 1,5 годам. Переднезадний размер грудной клетки у большинства доношенных новорожденных меньше поперечного диаметра или равен ему. Уже в течение первого года жизни поперечный диаметр начинает превалировать над переднезадним, и форма грудной клетки уплощается.

При рождении окружность головы у доношенных детей 33–37,5 см, она не должна превышать окружность грудной клетки больше чем на 1–2 см. В первые 3–5 месяцев ежемесячная прибавка составляет 1–1,5 см, а затем 0,5–0,7 см в месяц.

К году окружность головы увеличивается на 10–12 см и достигает 46–48 см. Окружность головы ребенка в возрасте 1–3 лет увеличивается на 1 см в год. С 4 лет окружность головы ежегодно увеличивается на 0,5 см. К 6 годам она равна 50–51 см, а за все последующие годы увеличивается на 5–6 см.

Окружность грудной клетки у новорожденных 33—35 см. Ежемесячная прибавка на первом году жизни составляет в среднем 1,5–2 см. К году окружность грудной клетки увеличивается на 15–20 см, затем интенсивность нарастания этого показателя снижается, и к дошкольному возрасту окружность грудной клетки в среднем увеличивается на 3 см, а в школьном — на 1–2 см в год. Переднезадний размер грудной клетки у большинства доношенных новорожденных меньше поперечного размера или равен ему. Уже в конце первого года жизни поперечный размер начинает превышать переднезадний и форма грудной клетки начинает приближаться к конфигурации взрослого, т. е. уплощается. Для оценки пропорциональности развития ребенка можно использовать некоторые антропометрические индексы. Антропометрия (от «антропо» и «метрия») – в антропологии система измерений человеческого тела и его частей.

Индекс Чулицкой: 3 окружности плеча + окружность бедра + окружность голени — длина тела у детей до 1 года равняется 25–20 см, а в 2–3 года — 20 см, в 6–7 лет — 15—10 см.

Индекс Эрисмана: окружность грудной клетки превышает полурост у детей до 1 года на 13,5–10 см, в 2–3 года — на 9–6 см, в 6–7 лет — на 4–2 см, в 8–10 лет — больше на 1 см или меньше на 3 см.

Индивидуальную оценку физического развития проводят путем сопоставления антропометрических показателей ребенка с нормативами и стандартами, разработанными специально для данного региона с учетом этнической принадлежности ребенка и климатогеографических условий проживания. Такие нормативы разработаны для центральных и многих других регионов страны с применением параметрических и непараметрических методов математического анализа с последующим расчетом на ЭВМ. С помощью предлагаемых нормативов оценка морфофункционального развития детей может быть сделана сигмальным, регрессионным или центильным методом. Таблицы регрессии, например, позволяют правильно оценить не только соответствие физического развития возрасту, но и пропорциональность физического развития у детей одного возраста с различным ростом.

Представленные в виде соматограмм таблицы регрессии помогают быстро и с достаточной точностью сопоставить уровень физического развития детей с их календарным возрастом, что удобно при массовых профилактических обследованиях в дошкольных детских учреждениях и в школах. Разработаны и единые таблицы оценки физического развития, приемлемые на любой территории страны, принимая во внимание этническую принадлежность и место проживания (город, сельская местность).

В основу построения таких единых для всех регионов таблиц положена универсальная устойчивость соотношений массы тела и роста, окружности грудной клетки и роста. Величины этих соотношений у мальчиков и девочек близки независимо от этнической принадлежности и в значительно большей степени зависят от длины тела, чем от паспортного возраста.

Параметры оценки физического развития детей в возрасте 1–11 лет

Длина тела, см	Масса тела, кг (М ± а)	Окружность грудной клетки, см (М ± а)	
		Мальчики	Девочки
75	9,2–11,5	46,9–51,1	45,8–50,0
80	10,0–12,2	47,9–52,0	46,7–51,0
85	10,7–13,1	48,8–53,0	47,7–51,9
90	12,1–14,4	49,7–54,2	48,6–52,9
95	13,3–15,8	50,6–55,2	49,5–53,9
100	14,3–17,1	51,8–56,3	50,6–55,1
105	15,8–18,6	53,0–57,8	51,8–56,7
110	17,2–20,1	54,5–59,0	52,8–58,1
115	18,8–21,7	55,7–60,6	54,1–59,6
120	20,5–24,2	57,3–62,4	55,4–61,1
125	22,4–26,8	58,9–64,3	56,8–62,9
130	24,6–29,8	60,4–66,4	58,5–65,1
135	26,9–32,8	62,4–68,7	60,4–67,4
140	29,4–36,3	64,2–71,0	62,4–70,1
145	32,4–40,2	66,8–73,5	64,1–72,4

Далее перечислены некоторые расчетные и табличные данные для определения показателей развития ребенка.

Прирост новорожденного ребенка каждый месяц первого года жизни составляет:

Срок	I четверть (1–3 мес.)	II четверть (3–6 мес.)	III четверть (6–9 мес.)	IV четверть (9–12 мес.)
Прирост	По 3 см	По 2,5 см	По 1,5 см	По 1 см

Формула расчета роста ребенка после года:

$$X = 75 + 5 \cdot n,$$

где 75 — средний рост ребенка в 1 год, 5 — ежегодная прибавка, n — возраст ребенка.

Суточная калорийность пищевого рациона ребенка:

$$Q = 1000 + 100 \cdot n,$$

где 1000 — суточная калорийность рациона для годовалого ребенка (в ккал), 100 — ежегодная прибавка, n — возраст ребенка.

Калорийный (энергетический расчет) — на 1 кг массы тела ребенка необходимо:

1/4 года — 120 ккал в сутки (502 кДж);
1/2 года — 115 ккал в сутки (481 кДж);
3/4 года — 110 ккал в сутки (460 кДж);
1 год — 100 ккал в сутки (418 кДж).
1 ккал = 4,183 кДж.
1000 мл молока содержит 2929 кДж (700 ккал).

Объемный способ расчета объема пищи для детей зависит от массы тела.

Ребенок должен получить молоко в размере:
от 2 до 6 недель — 1/5 массы своего тела;
от 6 недель до 4 месяцев — 1/6 массы своего тела;
от 4 до 6 месяцев — 1/7;
более 6 месяцев — 1/8 массы тела.

Увеличение массы тела ребенка за каждый месяц первого года жизни (в граммах):

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Прибавка	600	800	800	750	700	650	600	550	500	450	400	350

Массу тела ребенка до 10 лет в кг рассчитывают по формуле

$$m = 10 + 2 \cdot n,$$

где 10 — средний вес ребенка в 1 год; 2 — ежегодная прибавка веса; n — возраст ребенка.

Массу тела ребенка после 10 лет в кг рассчитывают по формуле

$$m = 30 + 4 \cdot (n - 10),$$

где 30 — средний вес ребенка в 10 лет; 4 — ежегодная прибавка веса; n — возраст ребенка.

Антропометрические индексы для взрослых

Для подростков и взрослых людей используются другие антропометрические индексы: весоростовый, пропорциональности, стройности, осанки, развития плеча и двигательного развития, а также индекс процентного содержания жира в организме — для девушек; отношение окружности талии к окружности бедер, названное индексом лишних килограммов; отношение массы тела в килограммах к квадрату роста в метрах, названное индексом массы тела, и т.д.

Два последних индекса вычисляют в некоторых фитнес-клубах для контроля над телосложением и массой тела.

Индекс лишних килограммов (ИЛ = окружность талии/окружность бедер), в норме составляющий 0,8 для женщин и 1,0 для мужчин.

Индекс массы тела (ИМТ) очень часто используется для оценки уровня физического здоровья человека. Согласно ему соотношение массы тела (кг) к квадрату роста (м) в интервале 18,5–25 имеет нормальное значение; в интервале 25–30 — избыток массы; более 30 — ожирение. При этом половые особенности не учитываются. ИЛ и ИМТ непригодны для оценки организма в 15–17 лет, но работают для 25–40-летних.

Каждая графа приводит вес тела в килограммах для человека с данным ростом и индекс массы тела. Килограммы округлены. Для использования таблицы найдите соответствующий рост в столбце слева. Далее, двигаясь по ряду вправо до нужного веса, число вверху колонки и есть индекс массы тела для данного роста и веса.

Определение индекса массы тела

Индекс массы тела, кг/м²	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40
Рост, см	Вес, кг													
145	41	43	45	47	50	52	54	56	58	60	62	64	75	86
147	42	45	47	49	51	54	56	58	60	62	64	67	78	89
150	44	46	48	50	53	55	58	60	62	64	67	69	80	92
152	45	48	50	52	55	57	59	62	64	67	69	71	83	95
155	47	49	52	54	57	59	61	64	66	69	70	74	86	98
157	48	51	53	56	59	61	63	66	68	71	73	76	89	101
160	49	52	55	58	60	63	65	68	71	73	76	78	92	104
162	51	54	57	59	62	65	67	70	73	76	78	81	94	108
165	53	56	59	61	64	67	70	72	75	78	81	84	97	111
167	54	57	60	63	66	69	72	75	77	80	83	86	100	115
170	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	103	118
172	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	106	121
175	59	63	66	69	72	75	78	81	85	88	91	93	109	125
177	61	64	67	71	74	77	81	84	87	90	94	97	112	129
180	63	66	69	73	76	80	83	86	90	93	96	99	116	132
182	65	68	72	75	78	82	85	89	92	95	99	102	119	136
185	67	70	73	77	81	84	87	91	94	98	101	105	122	140
187	68	72	76	79	83	86	90	94	97	101	104	108	126	114
190	70	74	77	81	85	89	92	96	99	104	107	111	129	148

Таблица индекса массы тела

ИМТ	Физическое состояние	Риск и патология
< 18,0	Недостаток веса 2-й степени	Хроническая усталость, апатия, нехватка витаминов, истощение, остеопороз, анорексия и т.д.
18,1 – 20,0	Недостаток веса 1-й степени	Проблемы пищеварения, истощение, стресс, хроническая усталость, низкий иммунитет, депрессия, гормональные нарушения и т.д.
20,1 – 25,0	Нормальный вес	Высокий уровень энергии, хорошая физическая форма, жизнерадостность, психоэмоциональное равновесие и т.д.
25,1 – 27,0	Лишний вес	Хроническая усталость, проблемы пищеварения, сердечно-сосудистой системы, варикоз и т.д.
27,1 – 30,0	Ожирение 1-й степени	Риск диабета, высокое давление, проблемы кровообращения, нарушение психики, проблемы суставов и т.д.
30,1 – 35,0	Ожирение 2-й степени	Диабет неинсулинозависимый, атеросклероз, стенокардия, инфаркт, тромбофлебит и т.д.
> 35,0	Ожирение 3-й степени	Диабет инсулинозависимый, инфаркт, инсульт, рак

Методика вычисления процентного содержания жира в организме применяется только для девушек. Принято считать, что у спортсменок содержится 10–15% жира, а норма — 22–24%. Необходимо понимать: нехватка жировой ткани не менее вредна для организма, чем ее избыток, а также, что девушка, имеющая 22–24% жировой ткани, не выглядит полной.

При проведении функционального обследования и оценке физического развития пациента применяют следующие антропометрические индексы.

- Размер окружности грудной клетки в сантиметрах в норме $= \frac{\text{рост}}{2} + (2\text{–}4\text{см})$. При этом экскурсия легких: окружность при вдохе — окружность при выдохе = = 5–7 см.
- ИМТ (индекс массы тела) вычисляют делением веса в килограммах на квадрат роста, выраженный в метрах, его норма 19–25.

$$\text{ИМТ} = \frac{\text{масса тела (кг)}}{\text{рост}^2\text{ (м)}}.$$

- Весоростовый индекс Кетле вычисляют делением веса в граммах на рост в сантиметрах. Норма у женщин — 325–375, у мужчин — 350–400.

$$\text{Индекс Кетле} = \frac{\text{масса тела (г)}}{\text{рост (см)}}$$

Кроме антропометрических индексов при обследовании функционального состояния используются следующие расчетные показатели.

- $\text{Тип телосложения} = \frac{\text{окружность грудной клетки в \%}}{\text{рост}}.$

Если результат 50–55% — нормостеник,
ниже 50% — астеник,
выше 55% — гиперстеник.

- $\text{Жизненный индекс} = \frac{\text{ЖЕЛ (мл)}}{\text{масса тела (кг)}}.$

Норма составляет 55–60 мл/кг.

- Проба Штанге — задержка дыхания на вдохе: сидя, после глубокого вдоха и выдоха, снова вдох, рот и нос при этом закрывают, норма составляет не менее 40–55 с.
- Проба Генчи — задержка дыхания на выдохе: в норме не менее 25–30 с.
- Соотношение ЧСС и АД (ЧСС и АД измеряются в покое).

$$\frac{\text{ЧСС} \cdot \text{АД(систолич.)}}{100}, \text{ норма составляет 85–110.}$$

- Проба Мартине: после измерения пульса в покое (за 10 с) исследуемый делает 20 глубоких приседаний (ноги на ширине плеч, руки вперед) за 30 с. По окончании подсчитывается пульс за первые 10 с. В норме пульс восстанавливается через 2–3 мин.

Оценка уровня физического здоровья взрослого человека

№ п/п	Показатель жизнедеятельности	Норма
1	Окружность грудной клетки (вдох)	$\frac{\text{Рост}}{2} + (2\text{–}4)$ см
2	Окружность талии	Рост – 100 см
3	Окружность бедер	Рост – 100 + 30 см
4	ИМТ	19–25
5	Частота дыхания (ЧД)	12–14 мин
6	Проба Штанге (задержка дыхания на вдохе)	60 с
7	Проба Генчи (задержка дыхания на выдохе)	40 с
8	Ps в покое за 1 мин	До 64 — отл.
9	Ps сразу после 20 приседаний за 10 с	До 25% — отл.
10	Время восстановления пульса после нагрузки	Через 1–3 мин
11	АД	120/80

Существует множество методик оценки уровня физического здоровья человека. В последнее время преимуществом пользуется методика профессора Геннадия Леонидовича Апанасенко.

Экспресс-оценка уровня здоровья мужчин и женщин (по Г. Л. Апанасенко)

Ученый предложил оценивать уровень здоровья по пяти категориям, что позволяет определить так называемый профиль здоровья. Уровень здоровья оценивается по 5-балльной шкале.

В нижеприведенных таблицах используются следующие сокращения: N — величина показателя; M — масса тела, кг/г; F — динамометрия сильнейшей руки, кг; ЖЕЛ — жизненная емкость легких, мл; ЧСС — частота сердечных сокращений, уд./мин; АД — артериальное давление, мм рт. ст.

Оценка отдельных параметров (в баллах) покажет слабые стороны развития и поможет их ликвидировать: нормализовать вес, увеличить силу, жизненную емкость легких и т. п.

Кроме того, если даже раз в месяц в течение года проводить подобную оценку своего состояния, то можно будет выявлять и свои «зоны риска» — зоны снижения функциональных возможностей организма в годовом цикле.

Состояние тренированности своей сердечно-сосудистой системы можно оценить по итогам выполнения нескольких простых тестов и одновременной оценкой ЧСС после всех тестов.

Для мужчин и женщин показатели варьируют.

Результаты сводятся в итоговую таблицу, которую обычно заполняют для определенной группы проверяемых.

Показатели		Уровень здоровья мужчин				
		I	II	III	IV	V
		Низкий	Ниже среднего	Средний	Выше среднего	Высокий
$\frac{\text{Масса (г)}}{\text{Рост (см)}}$	N	501	500–451	450	–	–
	балл	–2	–1	0		
$\frac{\text{ЖЕЛ (мл)}}{\text{Масса (кг)}}$	N	< 50	51–55	56–60	61–66	> 66
	балл	0	1	2	4	5
$\frac{\text{F (кг)}}{\text{Масса (кг)}} \cdot 100\%$	N	60	61–65	66–70	71–80	> 81
	балл	0	1	2	3	4
$\text{ЧСС} \cdot \frac{\text{АД}_{\text{сис}}}{100}$	N	> 111	110–95	94–85	84–70	< 69
	балл	–2	0	2	3	4
Время восстановления после 20 приседаний за 30 с (мин)	N	> 3	3–2	2–1,5	1,5–1	< 1
	балл	–2	1	3	5	7
Уровень здоровья по сумме баллов		4	5–9	10–13	14–16	17–24

4. Зак. 475

Показатели		Уровень здоровья женщин				
		I	II	III	IV	V
		Низкий	Ниже среднего	Средний	Выше среднего	Высокий
$\frac{\text{Масса (г)}}{\text{Рост (см)}}$		> 451	450–351	350	–	–
	N балл	–2	–1	0		
$\frac{\text{ЖЕЛ (мл)}}{\text{Масса (кг)}}$		< 40	41–45	46–50	51–56	> 56
	N балл	0	1	2	3	5
$\frac{\text{F (кг)}}{\text{Масса (кг)}} \cdot 100\%$		< 40	41–50	51–55	56–60	> 61
	N балл	0	1	2	3	4
$\text{ЧСС} \cdot \frac{\text{АД}_{сис}}{100}$		> 111	110–95	94–85	84–70	< 69
	N балл	–2	0	2	3	4
Время восстановления после 20 приседаний за 30 с (мин)		> 3	3–2	2–1,5	1,5–1	< 1
	N балл	–2	1	3	5	7
Уровень здоровья по сумме баллов		4	5–9	10–13	14–16	17–24

Итоговая таблица

№ п/п	ФИО	Вес (кг)	Рост (см)	$\frac{\text{Масса (г)}}{\text{Рост (см)}}$ в баллах	ЖЕЛ (мл)	$\frac{\text{ЖЕЛ (мл)}}{\text{Масса (кг)}}$ в баллах	Динамометрия кисти		$\frac{\text{Динамометрия}}{\text{Масса (кг)}}$ в %, в баллах	АД – сис./диас.	ЧСС	$\text{ЧСС} \cdot \frac{\text{АД}_{сис}}{100}$ в баллах	Время восстан. ЧСС после 20 приседаний	Время восстан. в баллах	Итог – сумма баллов
							правая	левая							
1															
2															
...															

Вывод заносим в таблицу.

Экспресс-оценка уровня физического здоровья группы

Обследованные студенты	Уровни (группы) здоровья				
	I	II	III	IV	V
	Низкий (кол-во – % от общего числа)	Ниже среднего (кол-во – % от общего числа)	Средний (кол-во – % от общего числа)	Выше среднего (кол-во – % от общего числа)	Высокий (кол-во – % от общего числа)
Общее кол-во:					
Мужчин					
Женщин					

Приблизительный уровень здоровья по годам

Возраст (годы)	Уровень здоровья					
	Мужчины			Женщины		
	Максимальный	Минимальный	Средний	Максимальный	Минимальный	Средний
17–30	15	10	12,5	14	8	11,3
31–40	15	4	9,2	10	5	7
41–50	14	4	8,7	7	3	5,3
51–60	10	3	6,7	7	0	5,3
61–70	6	3	5	5	2	3,3
71–80	4	3	2,5	–	–	–

Назначение проведения экспресс-оценки уровня здоровья обучающихся по методике Л.Г. Апанасенко:

— отслеживание динамики соматического здоровья (соматическое заболевание — телесное заболевание в противоположность психическому заболеванию) студентов по годам обучения;

— ндивидуальное оповещение обучающихся при выходе средней оценки уровня здоровья за пределы «безопасной зоны»;

— реализация составления индивидуальных паспортов здоровья обучающихся и определение индивидуального маршрута оздоровления (лечения и диспансеризации);

— формирование и реализация комплекса превентивных восстановительных методик (предупреждающих заболевания), основанных на принципах ЗОЖ;

— противодействие хронизации неинфекционных соматических заболеваний.

Согласно методике Л.Г. Апанасенко определяются следующие показатели: рост, вес, ЖЕЛ, динамометрия кисти, АД, ЧСС, время восстановления ЧСС после 20 приседаний. Показатели ранжированы, каждому рангу присвоен соответствующий балл.

Уровни здоровья характеризуют границы аэробного энергопотенциала человека как биологической системы.

«Безопасный уровень» соматического здоровья индивида характеризуется максимальными возможностями аэробного энергообразования. Для женщин и мужчин он находится между III–IV уровнем здоровья (12 баллов по шкале экспресс-оценки). То есть это тот уровень здоровья, который можно восстановить превентивными мерами.

Задания для самостоятельной работы

№ 38

Определите для какого-либо человека:

1) жизненную емкость легких;

2) минутный объем дыхания;

3) показатели сердечной деятельности: ударный и минутный объемы крови.

№ 39

Решите задачи по теме «Жизненная емкость легких».

1) Определите для себя:

а) жизненную емкость легких;

б) минутный объем дыхания;

в) показатели сердечной деятельности: ударный и минутный объемы крови.

Запишите расчетные формулы и заполните таблицу.

Сокращенное название показателя	ЖЕЛ (I способ), мл	ЖЕЛ (II способ), мл	ЖЕЛ (III способ), мл	ЖЕЛ (IV способ), мл	ЖЕЛ (V способ), мл	МОД, мл	УОК, мл	МОК, мл
Численное значение показателя								

2) Человек при спокойном дыхании делает 16 дыхательных движений в минуту. При физической нагрузке количество дыхательных движений увеличивается на 50%. Сколько углекислого газа при физической нагрузке выдохнет человек за 2 мин, если ЖЕЛ = 4000 $см^3$?

3) Сколько кислорода вдохнет человек, если известно, что при нормальном дыхании во вдыхаемом воздухе содержится 21% кислорода, а ЖЕЛ = 4000 $см^3$?

4) В течение 1 мин человек делает 16 дыхательных движений, при этом в легкие поступает за один вдох 1500 $см^3$ воздуха. Какова минутная вентиляция легких?

5) Сколько кислорода выдыхает человек за один раз, если его ЖЕЛ = 4500 мл?

№ 40

Вычислите рост и массу ребенка, которому 11 месяцев от рождения. Рассчитайте питание этого ребенка объемным и калорийным способом. Вес ребенка при рождении 3,5 кг, рост — 52 см.

№ 41

Решите задачи по теме «Расчет прибавки роста детей».

1) Вычислите рост и массу ребенка, которому 1 год от рождения и он родился с весом 3,5 кг. Рассчитайте питание этого ребенка объемным и калорийным способом.

2) Рассчитайте средний рост ребенка в возрасте 2 лет, 4 лет, 5 лет.

3) Заполните таблицу значениями роста ребенка:

2 года	3 года	4 года	5 лет	6 лет	7 лет

4) Рассчитайте прибавку роста ребенка с 3 до 6 лет.

5) Рассчитайте прибавку роста ребенка с 2 до 7 лет.

6) Рассчитайте прибавку роста ребенка с 4 до 8 лет.

7) Рассчитайте рост ребенка 6 лет весом 28,5 кг.

8) Рассчитайте прибавку роста ребенка с 2 до 5 лет.

9) Рассчитайте прибавку роста ребенка с года до 7 лет.

10) Рассчитайте прибавку роста ребенка с года до 5 лет.

№ 42

Решите задачи по теме «Расчет прибавки массы детей».

1) Рассчитайте вес ребенка 8 месяцев жизни, если известно, что вес при рождении ребенка составил 2 кг 800 г, а ежемесячно он набирал в весе согласно табличным данным.

2) Какой вес должен иметь ребенок 5 месяцев, если он родился с весом 3,5 кг?

3) До 5 месяцев ребенок, родившийся с весом 4,2 кг, прибавлял в весе среднестатистическое значение веса, а за 5-й, 6-й, 7-й месяцы жизни набирал всего по 500 г. Какой вес имел ребенок в 6 месяцев, в 7 месяцев?

4) За первые 3 месяца жизни ребенок набрал 1,3 кг. Сколько весил ребенок в 4 месяца, если он родился с весом 2,6 кг и за последний месяц жизни прибавил в весе среднестатистическое значение?

5) Рассчитайте вес ребенка 8 месяцев жизни, если известно, что он родился с весом 3 кг 100 г.

6) Сколько весит ребенок 1 года жизни, родившийся с весом 3 кг 300 г, если известно, что за последние 4 месяца он набрал в весе 2 кг, а остальные месяцы набирал в весе согласно таблице.

7) Рассчитайте вес пятимесячного ребенка, если вес его при рождении составил 3200 г и ежемесячно ребенок прибавлял в весе согласно табличным данным.

8) При рождении ребенка его вес был 3 кг 600 г. Каким будет его вес к 10 месяцам?

9) Рассчитайте вес семимесячного ребенка (согласно таблице), если в 3 месяца он весил 4 кг 200 г.

10) Ребенку 5 месяцев. При рождении он весил 3000 г, рассчитайте вес ребенка согласно таблице и его объем питания.

№ 43

Решите задачи по теме «Расчет питания детей».

1) Ребенку 9 месяцев, он родился с весом 4 кг 500 г. Подсчитайте объем питания ребенка, если он прибавлял в весе согласно табличным данным.

2) Рассчитайте, насколько больше пищи требуется шестимесячному ребенку, чем двухмесячному, если известно, что в 6 месяцев ребенок весит 5800 г, а в 2 месяца — 4000 г.

3) Масса двухмесячного ребенка составляет 5 кг 200 г. Рассчитайте объем питания ребенка.

4) Рассчитайте объем питания четырехмесячного ребенка, если он родился с массой 4 кг 200 г и прибавлял в весе согласно табличным данным.

5) Рассчитайте объем питания ребенка 7 месяцев, если при рождении он весил 3200 г.

6) Ребенок родился с весом 3 кг 200 г. Каким будет его объем питания в 1 месяц? В 4 месяца?

7) Рассчитайте объем питания двухмесячного ребенка, если известно, что его вес при рождении составил 2 кг 500 г.

8) Рассчитайте объем питания полугодовалого ребенка, если известно, что он родился с весом 3 кг 450 г.

9) Рассчитайте объем питания годовалого ребенка, если известно, что при рождении его вес составил 3 кг 800 г.

10) Рассчитайте объем питания пятимесячного ребенка, если известно, что он родился с массой 3 кг 300 г, 3 месяца прибавлял в весе согласно табличным данным, а в 4-й и 5-й месяцы по 800 г.

№ 44

Рассчитайте основные антропометрические индексы для себя, используя для этого формулы.

№ 45.

Используя методику профессора Г.Л. Апанасенко, проведите экспресс-оценку уровня физического здоровья группы из 10 студентов.

Вопросы по теме

1. *Поясните термины: жизненная емкость легких, минутный объем дыхания, ударный и минутный объемы крови.*
2. *Перечислите известные вам способы определения ЖЕЛ.*
3. *Что такое антропометрические индексы? Для чего они используются?*
4. *По каким формулам можно рассчитать рост, массу тела ребенка?*
5. *Как рассчитать количество молока для ребенка объемным и калорийным способами?*

Исторические сведения к разделу 1

О золотом сечении

Понятием и свойствами пропорции человечество пользуется очень давно. Самая известная пропорция в математике — золотое сечение, которое окружено атмосферой загадочности и таинственности.

Понятие о золотом делении ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н.э.). Он изучал свойства целых чисел и пропорций. Но свойства золотого сечения были известны еще египтянам и вавилонянам. В этом можно убедиться, если рассмотреть пропорции пирамид, храмов, барельефов, предметов быта и украшений гробниц.

Древние мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании. Французские архитекторы обнаружили, что в рельефе из храмов фараонов пропорции фигур соответствуют величинам золотого деления. Подданные фараонов, изображенные на рельефах гробниц, держат в руках измерительные инструменты, в которых зафиксированы пропорции золотого деления.

Греки были искусными геометрами. Даже арифметике обучали своих детей при помощи геометрических фигур. Давно известны в математике Пифагоровы числа — тройки таких натуральных чисел, что треугольник, длины сторон которого пропорциональны или равны этим числам, являются прямоугольным, например, тройка чисел: 3, 4, 5.

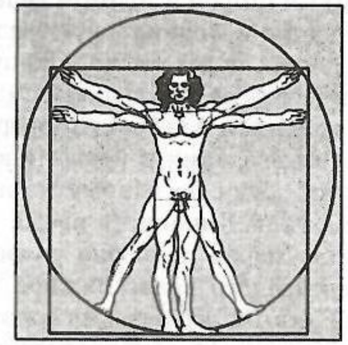
Платон (427–347 гг. до н.э.) также знал о золотом делении. Его высокохудожественный диалог «Тимей» посвящен математическим и эстетическим воззрениям школы Пифагора и, в частности, вопросам золотого деления.

В фасаде древнегреческого храма Парфенона присутствуют золотые пропорции. При его раскопках обнаружены циркули, которыми пользовались архитекторы и скульпторы античного мира. В помпейском циркуле (музей в Неаполе) также заложены пропорции золотого деления.

В дошедшей до нас античной литературе золотое деление впервые упоминается в «Началах» Евклида (III в. до н.э.). Во 2-й книге «Начал» дается геометрическое истолкование золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались Гипсикл Александрийский (ок. 190 до н.э. — 120 до н.э.), Папп (III в. н.э.) и др.

В эпоху Возрождения утверждались идеалы гармоничной, раскрепощенной творческой личности, красоты и гармонии действительности, стройной закономерности мироздания. Золотое сечение (термин ввел Леонардо да Винчи) — это особое соотношение, гармоническое деление, которому приписывались сверхъестественные возможности, используемое в искусстве и архитектуре на протяжении веков. Основано на пропорции, найденной в природе и приблизительно равной 1,618 : 1. Усилился интерес к золотому делению среди ученых и художников-архитекторов. Леонардо да Винчи (1452–1519),

художник и ученый, отразил в своих трудах пропорции золотого сечения.



Математики эпохи Возрождения прекрасно понимали значение науки для искусства. Этой проблемой занимались в разное время монах Лука Пачоли (1445–1514) — величайший математик Италии в период между Фибоначчи (1180–1240) и Галилеем (1564–1642), художник Пьеро делла Франчески (1420–1492), написавший две математические книги, одна из которых называлась «О перспективе в живописи», а другая «Книжица о пяти правильных телах». Его считают творцом начертательной геометрии.

В своих творениях деятели тех времен использовали глубокую продуманность пропорций, разумную ясность перспективных построений, пропорции золотого деления.

В 1509 г. в Венеции была издана книга Луки Пачоли «Божественная пропорция» с блестяще выполненными иллюстрациями, ввиду чего полагают, что их сделал Леонардо да Винчи. Книга была восторженным гимном золотой пропорции. Среди многих достоинств золотой пропорции монах Лука Пачоли не преминул назвать и ее «божественную суть» как выражение божественного триединства — Бог Сын, Бог Отец и Бог Дух Святой (подразумевалось, что малый отрезок есть олицетворение Бога Сына, больший отрезок — Бога Отца, а весь отрезок — Бога Духа Святого).

Леонардо да Винчи также много внимания уделял изучению золотого деления. Он производил сечения стереометрического тела, образованного правильными пятиугольниками, и каждый раз получал прямоугольники с отношениями сторон в золотом делении. Поэтому он дал этому делению название «золотое сечение». Так оно и держится до сих пор как самое популярное.

В то же время на севере Европы, в Германии, над теми же проблемами трудился Альбрехт Дюрер (1471–1528). Он делает наброски введения к первому варианту трактата о пропорциях. Судя по одному из писем Дюрера, он встречался с Лукой Пачоли во время пребывания в Италии. Альбрехт Дюрер подробно разработал теорию пропорций человеческого тела. Важное место в своей системе соотношений Дюрер отводил золотому сечению. Рост человека делится в золотых пропорциях линией пояса, а также линией, проведенной через кончики средних пальцев опущенных рук, нижняя часть лица — ртом и т.д. Известен пропорциональный циркуль Дюрера.

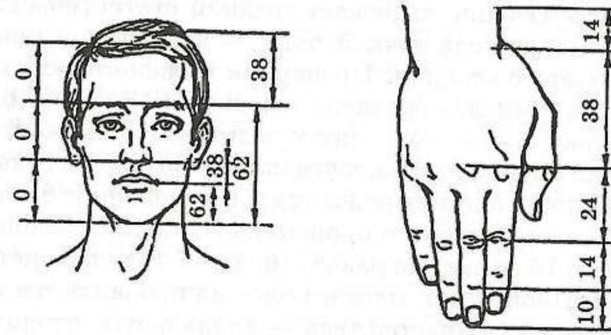
Великий астроном XVI в. Иоганн Кеплер назвал золотое сечение одним из сокровищ геометрии. Он первый обратил внимание на значение золотой пропорции для ботаники (рост растений и их строение).

В последующие века правило золотой пропорции не приветствовалось ведущими учеными и естествоиспытателями ввиду своей академичности.

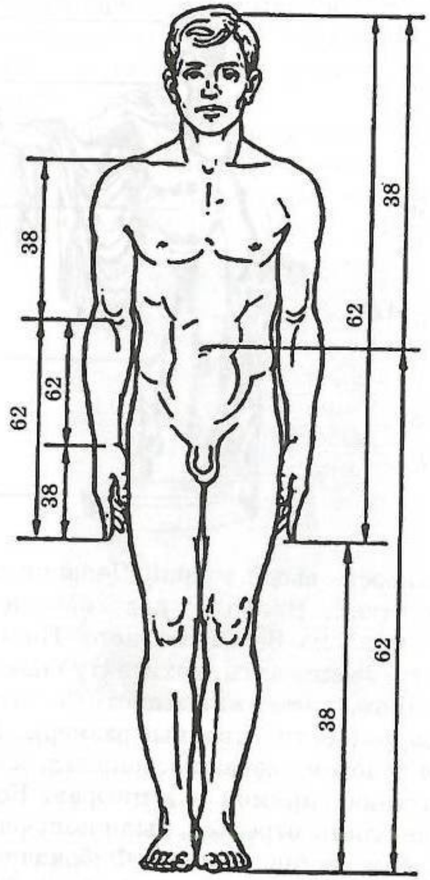
Вновь «открыто» золотое сечение было в середине XIX в. В 1855 г. немецкий исследователь золотого сечения профессор Цейзинг (1810–1876) опубликовал свой труд «Эстетические исследования».

Основная мысль сочинения — развитие закона пропорциональности деления. Если целое приходится делить на неравные по объему и значению части, то эстетическое впечатление получится в том случае, когда меньшая часть деления относится к большей, как большая относится к целому. Этот закон, по мнению Цейзинга, был известен в древности под названием «золотого сечения». Цейзинг иллюстрирует его на примерах, заимствованных из рассмотрения частей человеческого тела и частей растений.

Цейзинг проделал колоссальную работу. Он измерил около двух тысяч человеческих тел и пришел к выводу,

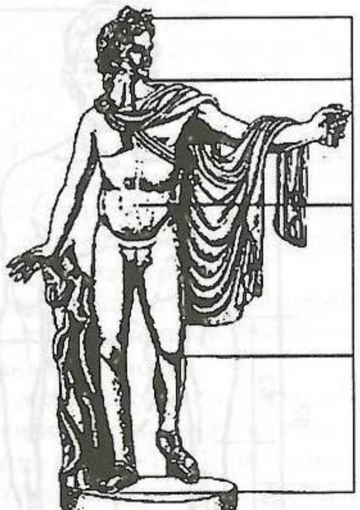


Золотые пропорции в частях тела человека



Золотые пропорции в фигуре человека

что золотое сечение выражает средний статистический закон. Деление тела точкой пупа — важнейший показатель золотого сечения. Пропорции мужского тела колеблются в пределах среднего отношения 13 : 8 = 1,625 и несколько ближе подходят к золотому сечению, чем пропорции женского тела, в отношении которого среднее значение пропорции выражается в соотношении 8 : 5 = = 1,6. У новорожденного пропорция составляет отношение 1 : 1, к 13 годам она равна 1,6, а к 21 году равняется мужской. Пропорции золотого сечения проявляются и в отношении других частей тела — длина плеча, предплечья и кисти, кисти и пальцев и т. д.



$$\frac{AC}{CE}=\frac{38}{62};$$

$$AB=\frac{1}{7}AE;$$

$$\frac{BC}{CE}=\frac{2}{5};$$

$$BC=DE.$$

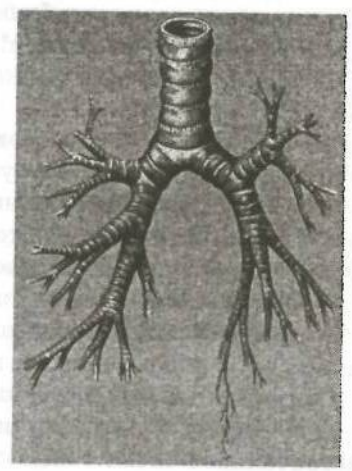
Справедливость своей теории Цейзинг проверял на греческих статуях. Наиболее подробно он разработал пропорции Аполлона Бельведерского. Подверглись исследованию греческие вазы, архитектурные сооружения различных эпох, растения, животные, птичьи яйца, музыкальные тона, стихотворные размеры. Цейзинг дал определение золотому сечению, показал, как оно выражается в отрезках прямой и в цифрах. Когда цифры, выражающие длины отрезков, были получены, Цейзинг увидел, что они составляют ряд Фибоначчи (элементы числовой последовательности 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., в

которой каждый последующий член равен сумме двух предыдущих), который можно продолжать до бесконечности в одну и в другую сторону. Следующая его книга имела название «Золотое деление как основной морфологический закон в природе и искусстве». В 1876 г. в России была издана небольшая книжка, почти брошюра, с изложением этого труда Цейзинга. Автор укрылся под инициалами Ю.Ф.В. В этом издании не упомянуто ни одно произведение живописи.

При изучении анатомии полезно знать золотые пропорции в частях тела и фигуре человека, изображенные на рисунке.

Золотая пропорция соблюдается в строении легких человека, показана на рисунке и была установлена американскими естествоиспытателями во время физико-анатомических исследований.

Особенность бронхов, составляющих легкие человека, заключена в их асимметричности. Бронхи состоят из двух основных дыхательных путей, один из которых (левый) длиннее, а другой (правый) короче.



Было установлено, что эта асимметричность продолжается и в ответвлениях бронхов, во всех более мелких дыхательных путях. Причем соотношение длины коротких и длинных бронхов также составляет золотое сечение и равно 1 : 1,618.

В конце XIX – начале XX в. появилось немало чисто формалистических теорий о применении золотого сечения в произведениях искусства и архитектуры. С развитием дизайна и технической эстетики действие закона золотого сечения распространилось на конструирование машин, мебели и т.д.

Ряд Фибоначчи (числа 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и т.д.) также связан с золотым сечением: отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого деления. Ряд Фибоначчи мог бы остаться только математическим казусом, если бы не то обстоятельство, что все исследователи золотого деления в растительном и животном мире, не говоря уже об искусстве, неизменно приходили к этому ряду как арифметическому выражению закона золотого деления.

Современные ученые продолжают использовать в своих трудах золотое сечение и числа Фибоначчи. Этим занимались Д. Гильберт (1862–1943), Ю. Матиясевич (род. 1947). Возникают изящные методы решения ряда кибернетических задач (теории поиска, игр, программирования) с использованием чисел Фибоначчи и золотого сечения. В США создается даже Математическая Фибоначчи-ассоциация, которая с 1963 г. выпускает специальный журнал.

Факты, подтверждающие существование золотых S-сечений в природе, приводит белорусский ученый Э.М. Сороко в книге «Структурная гармония систем». Это позволило автору выдвинуть гипотезу о том, что золотые S-сечения есть числовые инварианты самоорганизующихся систем. Будучи подтвержденной экспериментально, эта гипотеза может иметь фундаментальное значение для развития синергетики — новой области науки, изучающей процессы в самоорганизующихся системах.

С помощью кодов золотой S-пропорции можно выразить любое действительное число в виде суммы степеней золотых S-пропорций с целыми коэффициентами.

И в растительном, и в животном мире настойчиво пробивается формообразующая тенденция природы – симметрия относительно направления роста и движения. Здесь золотое сечение проявляется в пропорциях частей перпендикулярно к направлению роста.

Природа осуществила деление на симметричные части и золотые пропорции. В частях проявляется повторение строения целого.

Великий Гёте (1749–1832), поэт, естествоиспытатель и художник (он рисовал и писал акварелью), мечтал о создании единого учения о форме, образовании и преобразовании органических тел. Это он ввел в научный обиход термин «морфология» — наука о форме и строении организмов.

Пьер Кюри (1859–1906) в начале XX столетия сформулировал ряд глубоких идей симметрии. Он утверждал, что нельзя рассматривать симметрию какого-либо тела, не учитывая симметрию окружающей среды. Закономерности «золотой» симметрии проявляются в энергетических переходах элементарных частиц, в строении некоторых химических соединений, в планетарных и космических системах, в генных структурах живых организмов. Эти закономерности, как указано выше, есть в строении отдельных органов человека и тела в целом, а также проявляются в биоритмах и функционировании головного мозга и зрительного восприятия.

Золотое сечение нельзя рассматривать само по себе, отдельно, без связи с симметрией. Великий русский кристаллограф Г.В. Вульф (1863–1925) считал золотое сечение одним из проявлений симметрии.

Золотое деление — это не проявление асимметрии, чего-то противоположного симметрии. Согласно современным представлениям золотое деление — это асимметричная симметрия. В науку о симметрии вошли такие понятия, как статическая и динамическая симметрия. Статическая симметрия характеризует покой, равновесие, а динамическая — движение, рост. Так, в природе статическая симметрия представлена строением кристаллов, а в искусстве характеризует покой, равновесие и неподвижность. Динамическая симметрия выражает активность, характеризует движение, развитие, ритм, она — свидетельство жизни. Статической симметрии свойственны равные отрезки, равные величины. Динамической симметрии свойственно увеличение отрезков или их уменьшение, и оно выражается в величинах золотого сечения возрастающего или убывающего ряда.

О функциях и их свойствах

Понятие функции возникло в математике сравнительно недавно. Для того чтобы прийти к пониманию целесообразности его введения и получить первые достаточно четкие определения, потребовались усилия первоклассных математиков нескольких поколений. Революционные изменения в математике, происшедшие в XVII столетии, вызваны работами многих ученых, представляющих различные страны и народы. Но в первую очередь — это заслуга П. Ферма (1601–1665), Р. Декарта (1596–1650), И. Ньютона (1643–1727), Г.В. Лейбница (1646–1716).

Необходимые предпосылки к возникновению понятия функции были созданы в 30-х годах XVII в., когда возникла аналитическая геометрия, характеризующаяся, в отличие от классических методов геометров Древней Греции, активным привлечением алгебры к решению геометрических задач. (Решая задачи по геометрии координатным методом, вы, по существу, пользуетесь методами аналитической геометрии.) Практически одновременно (и независимо друг от друга) французские математики П. Ферма и Р. Декарт заметили, что введение системы координат на плоскости и задания фигур их уравнениями позволяют свести многие задачи геометрии к исследованию уравнений геометрических фигур. В честь Декарта, давшего развернутое изложение нового метода в книгах «Геометрия» и «Рассуждение о методе», прямоугольная система координат позднее была названа декартовой. Стоит заметить, что одновременно формировалась и алгебра, создавалось «буквенное исчисление», то самое, с помощью которого сейчас выполняются преобразования алгебраических выражений, решаются уравнения, текстовые задачи и т. д.

Сам термин «функция» впервые встречается в рукописи великого немецкого математика и философа Г. Лейбница — сначала в рукописи (1673 г.), а затем и в печати (1692 г.). Латинское слово *function* переводится как «свершение», «исполнение» (глагол fungor переводится также словом «выражать»). Лейбниц ввел это понятие для названия различных параметров, связанных

с положением точки на плоскости. В ходе переписки Г. Лейбниц и его ученик — швейцарский математик И. Бернулли (1667–1748) постепенно приходят к пониманию функции как аналитического выражения и в 1718 г. дает такое определение: «Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной и постоянных».

Л. Эйлер (1707–1783) в своей книге «Введение в анализ» (1748 г.) формулировал определение функции так: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо способом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств». Эйлер же ввел и принятые сейчас обозначения для функций.

Современное определение числовой функции, в котором это понятие уже освобождалось от способа задания, было дано независимо друг от друга русским математиком Н. И. Лобачевским (1792–1856) в 1834 г. и немецким математиком Л. Дирихле (1805–1859) в 1837 г. Основная идея этих определений заключалась в следующем: несущественно, каким образом (и в частности, необязательно путем задания аналитического выражения) каждому x поставлено в соответствие определенное значение y, важно только, что это соответствие установлено.

Современное понятие функции с произвольными областями определения и значений (необязательно числовыми) сформировалось, по существу, совсем недавно, в первой половине прошлого столетия, после работ создателя теории множеств Г. Кантора (1845–1918).

К понятию функции математики пришли, отправляясь от конкретных и трудных задач математики и ее приложений. Это происходило в процессе создания нового мощного аппарата исследований — интегрального и дифференциального исчислений. Открытие интегрального и дифференциального исчислений, центральным понятием которых Эйлер провозгласил функцию («Весь анализ бесконечного вращается вокруг переменных количеств и их функций»), резко расширило возможности математики.

РАЗДЕЛ 2

Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.1. Предел функции в точке. Раскрытие неопределенности вида

Термины

- Предел функции в точке
- Основные свойства пределов
- Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

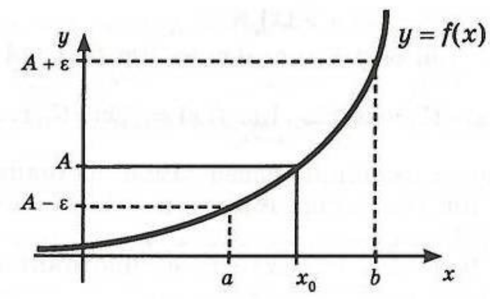
Определение предела функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале (a, b), кроме, быть может, точки $x_o \in (a, b)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_o, т.е.

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in (a, b)$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_o| < \delta, x \neq x_o \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначают это так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к ∞, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число N, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначают это так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to \infty.$$

Теорема. (Правило замены переменной)

Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $f(x) \neq y_0\ \forall\ x \neq x_0$ и $\lim\limits_{y \to y_0} F(y)$, то при $x \to x_0$ существует предел сложной функции $F[f(x)]$ и $\lim\limits_{x \to x_0} F[f(x)] = \lim\limits_{y \to y_0} F(y)$.

Свойства пределов функции

Пусть все функции, рассматриваемые ниже, определены на интервале (a, b), кроме, быть может, фиксированной точки $x_0 \in (a, b)$. Тогда верны следующие свойства:

1. Функция не может иметь двух разных пределов в одной точке, т.е. если предел существует, то он единственный.

2. Если $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ и
$$A = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \psi(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$
3. Если $f(x) = C$ (const) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x) = C$, т. е. предел постоянной величины равен самой постоянной.
4. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и $\forall C$ — const, то $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т. е. постоянное число можно вынести за знак предела.
5. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, т. е. предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций. Это свойство справедливо и для разности.
6. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, т. е. предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций.
7. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, т. е. предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций, если эти пределы существуют и знаменатель отличен от нуля.
8. Для непрерывной функции можно переставлять знак предела и знак функции:
$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Как частный случай — если функция $f(x)$ имеет предел при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$, где n — натуральное число.

Все эти свойства доказываются одинаковым методом, основанным на соответствующих свойствах пределов последовательностей. Для доказательства этих свойств используются понятия бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Бесконечно малые функции обладают следующими основными свойствами:

1. Если функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми, то функция $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ также есть бесконечно малая алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых, определенная на общем множестве, есть величина бесконечно малая при $x \to x_0$.
2. Произведение ограниченной при $x\to a$ функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.
3. Произведение постоянной на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.
4. Произведение двух бесконечно малых есть функция бесконечно малая.
5. Если в функции $[\alpha(x)]^n$ — (n — целая положительная степень) $\alpha(x)$ – бесконечно малая, тогда и $[\alpha(x)]^n$ — бесконечно малая.
6. Отношения двух бесконечно малых $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$, $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$, $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ — может быть функция произвольного поведения. Но с помощью действия деления можно сравнить между собой бесконечно малые.

Далее рассмотрены бесконечно большие функции.

Функция $f = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x)| > \varepsilon$, $\forall x : |x - x_0| < \delta$, $x < x_0$.

В этом случае будем писать $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta : f(x) > \varepsilon\ (f(x) < -\varepsilon)\ \forall x : |x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{(x \to x_0)} f(x) = -\infty$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim f(x) = \infty$, т.е. для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, $x \to a$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x)| > M$.

Замечание. Величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой.

Бесконечно большие функции обладают следующими основными свойствами:

1. Если функция $\alpha(x)$ бесконечно большая, то $1/\alpha(x)$ есть бесконечно малая.
2. Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая и не обращается в нуль, то $1/\alpha(x)$ есть бесконечно большая.

В дальнейшем будем использовать символические записи для любого числа

$$a > 0:\ \frac{a}{+0} = +\infty,\ \frac{a}{-0} = -\infty,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{a}{+\infty} = 0,$$

$$\frac{a}{-\infty} = -0,\ \frac{a}{\infty} = 0.$$

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$ имеют одинаковый порядок, если их отношение имеет конечный предел, отличный от нуля, т.е $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K \neq 0$. Порядок бесконечно малой $\beta(x)$ выше порядка бесконечно малой $\alpha(x)$, если отношение $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ есть бесконечно малое при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$.

В этом случае пишут $\beta(x) = 0\ [\alpha(x)]$ при $x \to x_0$.

Бесконечно малая $\beta(x)$ имеет предел n относительно бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{a^n(x)} = K \neq 0.$$

Задания для самостоятельной работы

№ 46.

Вычислите предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 - x + 2}$.

Решение:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 - x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1,$$

так как $\frac{5}{x} \to 0$; $\frac{1}{x^2} \to 0$; $\frac{1}{x} \to 0$; $\frac{2}{x^2} \to 0$ при $x \to \infty$.

Ответ: 1.

№ 47.

Вычислите пределы:

Вариант 1.

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x - 8}{x^2 - x - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^3 + 8x - 3}{5x^3 - 2x^2 + 4}$.

Вариант 2.

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{3x^2 - x - 5}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^5 - 4x^4 + 13}{4x^4 - 8x^2 + x^5}$.

Вариант 3.

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 12x + 2}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^3 - 5x}$.

Вариант 4.

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 13}{x^2 + x - 21}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5x}{x^3 - 4x^2 - 5x}$.

Вариант 5.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-8x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-4x^4+1}{2x^5+3x^3-x}$.

Вариант 6.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+3}{x^2-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x+1}{4x^3-x+2}$.

Вариант 7.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-3}{6-x-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2+x+3}{-4+x+2x^2}$.

Вариант 8.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-12}{5x^3-4x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x+x^3}{2x^3+5x-3}$.

Вариант 9.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7}{x^3+2x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+8x-1}{5x^6-8x^2-3}$.

Вариант 10.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+11x+3x^5}{3x^5+x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^2+8}{3x^5+2x^2+1}$.

Вариант 11.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x-4}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$.

Вариант 12.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+6x+3}{2x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$.

Вариант 13.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-9x+1}{x^2-5x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2-x+1}$.

Вариант 14.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^2+1}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$.

Вариант 15.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+5x+1{,}5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+2}$.

Вариант 16.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-4x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+1}{3x^2+4x+2}$.

Вариант 17.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-x^2}{3x^2+8x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2+1}{2x^4-x+2}$.

Вариант 18.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2}{5x^3-4x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$.

Вариант 19.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{5-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{5x^6-7x^2-2}$.

Вариант 20.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-1}{3x^2+11x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$.

Вариант 21.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-1}{x^2-x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+8x-3}{5x^3-2x^2+4}$.

Вариант 22.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-4}{3x^2-x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^4+13}{4x^4-8x^2+x^5}$.

Вариант 23.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-12x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^3-5x}$.

Вариант 24.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x}{x^3-4x^2-5x}$.

Вариант 25.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+1}{x^2-8x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-4x^4+1}{2x^5+3x^3-x}$.

Вариант 26.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+2x+1}{4x^3-x+2}$.

Вариант 27.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+8x-1}{2-x-3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2+x+3}{-4+x+2x^2}$.

Вариант 28.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-10}{5x^3-4x+21}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x+x^2}{2x^3+5x-3}$.

Вариант 29.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7}{x^2+2x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+8x-1}{5x^6-8x^2-3}$.

Вариант 30.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+11x+3x^5}{3x^5+2x^2+11}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^2+8}{3x^5+2x^2+1}$.

Вариант 31.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x-1}{2x^2-x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$.

Вариант 32.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+3}{2x^2+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$.

Вариант 33.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2-x+1}$.

Вариант 34.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^2+1}{x^2-2x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$.

Вариант 35.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-6}{2x^2+5x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+2}$.

Вариант 36.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-11}{x^2-4x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+1}{3x^2+4x+2}$.

Вариант 37.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x-x^2}{3x^2+8x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2+1}{2x^4-x+2}$.

Вариант 38.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-11}{5x^3-4x-2}$; б) $\lim\limits_{\to\infty}\dfrac{x\ \ -3x+4}{2x\ \ +5x-1}$.

Вариант 39.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-7}{7-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{5x^6-7x^2\ 2}$.

Вариант 40.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-1}{3x^2+11x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$.

Вопросы по теме

1. Дайте определение предела функции.
2. Перечислите основные свойства пределов функций.
3. Какие вам известны приемы вычисления пределов функций?
4. Какие вам известны способы раскрытия неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$?
5. Разъясните понятия «бесконечно малая функция», «бесконечно большая функция».

Тема 2.2. Раскрытие неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Первый замечательный предел

Термины

- Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$
- Первый замечательный предел
- Второй замечательный предел

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Первый замечательный предел

Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел. (Число e)

Последовательность $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет предел, заключенный между 2 и 3.

Можно доказать, что функция $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$,

$x\in(-\infty,\,-1)\cup(0,\,+\infty)$ при $x\to\infty$ стремится к e:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Пусть $\dfrac{1}{x}=\alpha\ (\alpha>-1)$, тогда $e=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, где $e=2{,}7182818284\ldots$.

При определении предела некоторой функции, заданной аналитически, при $x\to a$ или $x\to\infty$, $+\infty$, $-\infty$, при формальной подстановке этой величины в качестве аргумента в формулу можно получить неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 0^∞ или 1^∞.

В этом случае нельзя судить о существовании предела и используют некоторые приемы для раскрытия неопределенности. Например, сокращение дроби, умножение на сопряженное выражение, использование замечательных пределов и т.д.

Задания для самостоятельной работы

№ 48. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-4x-4}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-4x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2(x+\frac{1}{2})(x-2)}{3(x+\frac{2}{3})(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{5}{8}.$$

Предварительно разложим числитель и знаменатель по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена.

Ответ: а) $\frac{5}{8}$.

№ 49. Вычислите пределы:

Вариант 1. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

Вариант 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$.

Вариант 3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Вариант 4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$.

Вариант 5. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Вариант 6. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

Вариант 7. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{3x^2+8x-3}{-3+2x+x^2}$.

Вариант 8. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$.

Вариант 9. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2+2x-8}$.

Вариант 10. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{6+11x+3x^2}{3x^5+2x^2+1}$.

Вариант 11. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$.

Вариант 12. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$.

Вариант 13. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$.

Вариант 14. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3x-x^2+4}{x^2-2x-8}$.

Вариант 15. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$.

Вариант 16. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$.

Вариант 17. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$.

Вариант 18. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$.

Вариант 19. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{8-x^3}$.

Вариант 20. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$.

Вариант 21. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

Вариант 22. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$.

Вариант 23. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Вариант 24. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$.

5. Зак. 475

Вариант 25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Вариант 26. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

Вариант 27. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+8x-3}{6-x-3x^2}$.

Вариант 28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$.

Вариант 29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+2x-8}$.

Вариант 30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6+11x+3x^2}{3x^5+2x^2+1}$.

Вариант 31. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$.

Вариант 32. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$.

Вариант 33. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$.

Вариант 34. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x-x^2+4}{x^2-2x-8}$.

Вариант 35. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$.

Вариант 36. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$.

Вариант 37. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$.

Вариант 38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$.

Вариант 39. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$.

Вариант 40. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$.

№ 50. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x^2+8)$. Ответ: 4.

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-11}{8x^2+5}$. Ответ: $-\dfrac{11}{13}$.

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Ответ: 6.

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$. Ответ: 4.

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$. Ответ: 3.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x-5}-\sqrt{5+x}}$. Ответ: $-\sqrt{5}$.

№ 51. Вычислите пределы:

Вариант 1.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-4x^2-2)$;
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x+6}{8x^2-3}$;
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x-10}{x^2-4}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{10x^2-x-2}{2x-1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

Вариант 2.

1. $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-5x+13)$;
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x-7}{5x^2+9}$;
3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{15+5x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2+3x-60}{4-x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{x}$.

Вариант 3.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^4-4x^3+1)$;
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+4x-9}{2x^3-12}$;
3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{4+x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{4x^2+30x-16}{2x-1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$.

Вариант 4.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3-8x-2)$;
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x+5}{2x^4-6}$;
3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{6+3x}$;
4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{2x^2-8}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-2}{x-8}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

Вариант 5.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+6x-9)$;
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-5x+7}{3x^2-8}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x^2}{x^4+3x^3-2x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{-2x^2+7x-3}{2x-1}$;
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{20-20x+5x^2}{x^3-8}$;
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 17x}{x}$.

Вариант 6.

1. $\lim\limits_{x\to 4}(x^2+5x-11)$;
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-4}{2x^2-5}$;
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$;
5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Вариант 7.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x^4-2x-6)$;
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^3+7x-2)}{3x^2-9}$;
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2+3x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{x}$.

Вариант 8.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-4x+2)$;
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+6x-5}{2x^2-7}$;
3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;
4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{3x-12}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^3-1}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{x}$.

Вариант 9.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^4-5x+3)$;
2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-7}{5x-11}$;
3. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x-3}$;
4. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-5x-36}{81-x^2}$;
5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{16-x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 15x}{x}$.

Вариант 10.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^4-3x+8)$;
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x+1}{7x^2-8}$;
3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$;
5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}$;
6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 20x}{x}$.

Вариант 11.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-5x^2+1)$;

Вариант 12.

1. $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+11)$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x+6}{x^2-3}$;

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{10x^2-x-2}{2x-1}$;

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$

Вариант 13.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^4-6x^3+2)$;

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-5}{2x^3-11}$;

3. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{4+x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{4x^2+30x-16}{2x-1}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x}{x}$.

Вариант 15.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2+5x-4)$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x-7}{7x^2+9}$;

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{12+4x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2+3x-60}{4-x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$.

Вариант 14.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3-7x-2)$;

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-x+3}{2x^4-5}$;

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{8+4x}$;

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+6x+8}{2x^2-8}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-3}{x-27}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

Вариант 16.

1. $\lim\limits_{x\to 4}(2x^2+3x-10)$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-2x+9}{4x^2-8}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x^2}{x^4+3x^3-2x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{-2x^2+7x-3}{2x-1}$;

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{20-20x+5x^2}{x^3-8}$;

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 13x}{x}$.

Вариант 17.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x^4-4x-1)$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x-2}{2x^2-9}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2+3x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 16x}{x}$.

Вариант 19.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^4-6x+4)$;

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-8}{3x^2-5}$;

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}$;

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+3}{x-9}$;

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 14x}{x}$.

Вариант 18.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-3x+1)$;

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x-9}{2x^2-8}$;

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{3x-12}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^3-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 18x}{x}$.

Вариант 20.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^4-5x+3)$;

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-8}{3x-9}$;

3. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-16}{2x-4}$;

4. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-5x-36}{81-x^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{16-x^2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 17x}{x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+8x+1}{3x^2-6}$;

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-81}{x+3}$;

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$;

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}$;

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$;

7. $\lim\limits_{\to}\dfrac{\sin 19}{}$.

№ 52. Выполните тестовые задания.

1. Значение, равное 2, имеют два из приведенных ниже пределов:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x-1}{4+2x+3x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+4x}{2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x^2}{1-x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2x+1}$.

2. Значение предела $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2+x)(3+x)}{4-x^2}$ равно:

1) $\dfrac{1}{4}$; 2) $-\dfrac{1}{4}$; 3) 0; 4) ∞.

3. Функция $f(x)=\dfrac{2x-4}{x^2+x}$ имеет разрыв в двух точках:

1) –1; 2) 0; 3) 1; 4) 2.

4. Предел $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{4x-x^2}{x-9}$ равен:

1) –1; 2) 8; 3) 32; 4) 0.

5. Предел $\lim\limits_{\to}\dfrac{16}{}$ равен:

1) –8; 2) 8; 3) 4; 4) 0.

6. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-5-tx^2}{2x^2-x+t}=2$, если параметр t принимает значение, равное:

1) –4; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) –0,25; 4) 4.

7. Значение предела $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{4-x^2}$ равно:

1) $\dfrac{1}{4}$; 2) $-\dfrac{1}{4}$; 3) 0; 4) ∞.

8. Установите соответствие между пределами и их значениями.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; 1) 2.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$; 2) $\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}$; 3) 1.

9. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{5x}\right)^{5x}$ равен числу e в степени:

1) 2; 2) 10; 3) $\dfrac{2}{5}$; 4) $\dfrac{5}{2}$.

10. Значение предела $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(2+x)(5-x)}{25-x^2}$ равно:

1) 0,7; 2) ∞; 3) 7; 4) 0.

Вопросы по теме

1. *Какие вам известны способы раскрытия неопределенности вида* $\frac{0}{0}$*?*
2. *Сформулируйте первый замечательный предел.*
3. *Сформулируйте второй замечательный предел.*
4. *Каким образом раскладывается квадратный трехчлен на множители?*
5. *Как используется теория пределов?*

Тема 2.3. Правила дифференцирования. Производная функции в точке. Производные высших порядков

Термины

- Приращение аргумента
- Приращение функции
- Производная функции
- Таблица производных
- Дифференцирование
- Правила дифференцирования
- Вторая производная
- Производные высших порядков
- Механический смысл производной
- Применение производной

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Производная функции в точке

Пусть задана функция $f(x)$, $x \in (a;\ b)$ и пусть x_0 — некоторая точка интервала $(a;\ b)$.

Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Таким образом, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке. Функция $f(x)$, $x \in (a;\ b)$, имеющая в каждой точке интервала $(a;\ b)$ производную, называется дифференцируемой на этом интервале. Операция нахождения производной данной функции называется дифференцированием и обозначается с помощью штриха.

Если ввести приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$ и приращение функции $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, то производная функции $f(x)$ в точке x_0 запишется в виде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Часто для обозначения производной вместо штриха используется символ $\dfrac{df}{dx}$, т.е. $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}$.

Так как x_0 — произвольное значение аргумента, то будем обозначать его просто x. Тогда формула примет вид $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

О приращении аргумента и функции говорилось выше. Введем понятие разностного отношения — это отношение приращения функции к приращению аргумента, т. е. $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Тогда определение производной можно записать так: производной функции в точке является предел разностного отношения, если приращение аргумента стремится к нулю.

Если отношение $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ***имеет предел при*** $x \to x_0$***, то этот предел называется производной функции в точке*** x_0 ***и обозначается*** $f'(x_0)$.

Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Если использовать обозначения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(\Delta x + x_0) - f(x_0)$, тогда запишем

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$, то говорят, что для этого значения существует *бесконечная* производная.

Операция вычисления производной от данной функции называется операцией *дифференцирования.*

Рассмотрим примеры.

а) $y = c$ (c – const), так как $\Delta y = c - c = 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 = c'.$$

б) $y = a^x$.

Пусть необходимо определить $y' = (a^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$, тогда $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$ и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}\right] = a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Докажем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln a$.

Функция $y = a^x - 1$ строго монотонна и непрерывна $\forall\ x \in (-\infty, +\infty)$, поэтому обратная функция $x = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$ также монотонна и непрерывна при $y > -1$.

При $x = 0$ и $y = 0$, условия $x \to 0$ и $y \to 0$ эквивалентны. Сделаем замену переменных в пределе

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y \ln a}{\ln(1+y)} = \ln a \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y}} = \ln a.$$

Следовательно, $(a^x)' = a^x \ln e$, если $a = e \Rightarrow (e^x)' = e^x \ln e$, т.е. показательная функция с основанием e имеет производную, совпадающую с самой функцией.

в) $y = x^n$, n — положительное целое.

Используем разложение бинома:

$$y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$

$$= nx^{n-1}\cdot\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot(\Delta x)^2 + K + (\Delta x)^n$$

и, следовательно, при $\Delta x \to 0$ получим, что

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n\cdot x^{n-1} : (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Формула справедлива и если n — вещественное число.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может и не иметь производной.

Доказательство:

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. $\Delta y = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$.

Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x = y'\cdot 0 = 0.$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

Основные правила дифференцирования

1) Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором интервале, то на этом интервале $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$, т.е. производная сумма (разности) функций равна сумме (разности) производных этих функций.
2) Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором интервале, то на этом интервале $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, или, короче: $(uv)' = u'v + uv'$.
3) Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т. е. $(cu)' = cu'$; где $u = u\ (x)$ — дифференцируемая функция.
4) Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале $(a;\ b)$. Если $v(x) \neq 0$, для любого $x \in (a;\ b)$, то
$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$
5) Производная функции от функции (сложной функции): $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$; $\dfrac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

Понятие о производных высших порядков

Производная $f'(x)$ от функции $F(x)$ называется производной первого порядка и представляет собой некоторую функцию. И если эта функция тоже имеет производную, тогда производная от производной первого порядка называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)$, т.е. $f''(x) = [f'(x)]'$.

Аналогично определяется производная $f^{(n)}(x)$ любого порядка $n = 1, 2, \ldots$; если существует производная $f^{(n-1)}(x)$ n–1 порядка (при этом под производной нулевого порядка подразумевается сама функция $f^{(0)}(x) = y = f(x)$.

Согласно определению, производной в точке x_0 получим

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Замечание. Когда говорят, что f имеет в точке x_0 производную порядка n, то это значит, что в некоторой окрестности точки x_0 у функции f существуют все производные низших порядков.

Механический смысл второй производной

Механический смысл первой производной — скорость.

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, где s — путь, проходимый точкой за время t. Тогда скорость v этого движения есть $v = s'(t) = v(t)$, т.е. тоже некоторая функция времени.

В момент времени t скорость имеет значение $v = v(t)$. Рассмотрим другой момент времени $t + \Delta t$. Ему соответствует значение скорости $v_1 = v(t + \Delta t)$. Следовательно, приращению времени Δt соответствует приращение скорости $\Delta v = v_1 - v = v(t + \Delta t) - v(t)$. Отношение $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \alpha_{cp}$ называется средним ускорением за промежуток времени Δt.

Ускорением в данный момент времени t называется предел среднего ускорения при $\Delta t \to 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Таким образом, ускорение прямолинейного движения точки есть производная скорости по времени. Но, как мы уже видели, скорость есть производная пути s по времени $t : v = s'$. Учитывая это, имеем $a = v'(t) = (s')' = s''(t)$, т.е. ускорение прямолинейного движения точки равно 2-й производной пути по времени $a = s''(t)$.

Задания для самостоятельной работы

№ 53.

Найдите производные функций:
а) $y = \cos^5 x$; б) $y = \cos^2 3x$.

Решение:

Пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных, находим:

а) $y = 5\cos^4 x \cdot (\cos x)' = 5\cos^4 x \cdot (-\sin x) =$
$= -5\cos^4 x \cdot \sin x$.

б) $y = \cos^2 3x$;
$y = 2\cos 3x \cdot (\cos 3x)' = 2\cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)' =$
$= -2\cos 3x \cdot \sin 3x \cdot 3 = -3\sin 6x$.

№ 54

Найдите производную второго порядка
$y = \sin(\ln x)) + \cos(\ln x))$.

Решение.

$$y' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x} - \sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)),$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)) +$$

$$+\frac{1}{x}\left(-\sin(\ln x)\frac{1}{x} - \cos(\ln x)\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\cos(\ln x).$$

№ 55.

Найдите производную третьего порядка от функции $y = x \ln x$.

Решение.

$y' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x(1/x) = \ln x + 1$;
$y'' = (\ln x)' + (1)' = 1/x$;
$y''' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -1/x^2$.

№ 56.

Найдите производную четвертого порядка функции $y = \ln x$.

Решение:

$$y^{I} = \frac{1}{x};\; y^{II} = -\frac{1}{x^2};\; y^{III} = \frac{2}{x^3};\; y^{IV} = -\frac{6}{x^4}.$$

№ 57.

Заполните таблицу:

$y(x)$	x^5	$2x^4$	x^{-8}	$3x^{-7}$	x^3-8	$4x$	$x+2$	$\frac{1}{x^5}$	$\sqrt{x}$	$\frac{x^6}{6}$	$\frac{10}{x^3}$
$y'(x)$											

Используйте для заполнения таблицу производных и правила дифференцирования.

№ 58.

Вычислите значение производной функции $f(x)$ в данной точке:

а) $f(x) = 2x^5 - 3x + 11$, $x = 1$;
б) $f(x) = x^2/4 - 4/x^2 + 8$, $x = 2$;
в) $f(x) = 2\sqrt{x} - 1/x$, $x = 1$;
г) $f(x) = (x^2 + 8)\cdot(2x - 1)$, $x = 0$;
д) $f(x) = (x^2 - 3) / (x + 1)$, $x = 0$;
е) $f(x) = (x^3 - 2)^{10}$, $x = 1$.

Ответ: а) 7; б) 2; в) 2; г) 16; д) 3; е) –30.

№ 59.

Найдите производную функции.

Вариант 1.

1) $f(x) = 3x^8 - 7x - 2{,}5$;
2) $f(x) = 6/x^4 - x^5/2 + 2\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \cos x\,(5 - x^2)$;
4) $f(x) = (x + 2) / \sin x$;
5) $f(x) = (5x^2 - 1)\cdot(x + 4)$;
6) $f(x) = (3x^5 - 2)^8$;
7) $f(x) = \cos 5x$.

Вариант 2.

1) $f(x) = 5x^6 - 2x - 4{,}5$;
2) $f(x) = 3/x^9 - x^8/4 + 4\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \sin x\,(3 - x^2)$;
4) $f(x) = (x + 6) / \cos x$;
5) $f(x) = (3x^3 - 1)\cdot(x + 2)$;
6) $f(x) = (2x^8 - 3)^{15}$;
7) $f(x) = \sin 3x$.

Вариант 3.

1) $f(x) = 6x^9 - 7x - 1{,}5$;
2) $f(x) = 2/x^3 - x^6/9 + 12\sqrt{x}$;
3) $f(x) = (x - 4)\ \mathrm{ctg}\ x$;
4) $f(x) = (2 - x^2)\ /\ \cos x$;
5) $f(x) = (6x^2 - 3) \cdot (x + 2)$;
6) $f(x) = (3x^4 - 5)^6$;
7) $f(x) = \mathrm{tg}\ (x/2)$.

Вариант 4.

1) $f(x) = 2x^{10} - 8x - 13$;
2) $f(x) = 4/x^5 - x^5/10 + 2\sqrt{x}$;
3) $f(x) = (x - 3)\ /\ \mathrm{tg}\ x$;
4) $f(x) = (x^2 + 1)\ /\ \sin x$;
5) $f(x) = (5x^2 - 4) \cdot (x + 2)$;
6) $f(x) = (4x^3 - 1)^{12}$;
7) $f(x) = \mathrm{ctg}\ (x/7)$.

Вариант 5.

1) $f(x) = 3x^4 - 12x - 2$;
2) $f(x) = 2/x^{10} - x^2/8 + 8\sqrt{x}$;
3) $f(x) = (x + 2)\ /\ \sin x$;
4) $f(x) = (5 - x)\ /\ \cos x$;
5) $f(x) = (6x^2 - 3) \cdot (x + 2)$;
6) $f(x) = (5x^2 - 3)^6$;
7) $f(x) = \sin\ (2x - \pi/3)$.

Вариант 6.

1) $f(x) = 2x^7 - 8x - 9$;
2) $f(x) = 3/x^7 - x^4/4 + 6\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \sin x\ (3x^4 - 1)$;
4) $f(x) = (x + 3)\ /\ \cos x$;
5) $f(x) = (3x^4 - 1) \cdot (x + 5)$;
6) $f(x) = (6x^3 - 2)^4$;
7) $f(x) = \cos\ (3x + \pi/4)$.

Вариант 7.

1) $f(x) = 3x^5 - 4x - 10$;
2) $f(x) = 2/x^8 - x^5/10 + 4\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \cos x\ (2x^2 - 1)$;
4) $f(x) = (x + 5)\ /\ \sin x$;
5) $f(x) = (2x^2 - 4) \cdot (x + 3)$;
6) $f(x) = (5x^4 - 3)^8$;
7) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

Вариант 8.

1) $f(x) = 5x^7 - 8x + 1$;
2) $f(x) = 6/x^3 - x^5/5 + 2\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \sin x\ (x^2 - 4)$;
4) $f(x) = (x - 6)\ /\ \cos x$;
5) $f(x) = (3x^2 - 1) \cdot (x + 4)$;
6) $f(x) = (3x^3 - 2)^7$;
7) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$.

Вариант 9.

1) $f(x) = 6x^3 - 2x + 7$;
2) $f(x) = 4/x^8 - x^8/4 + 8\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \mathrm{ctg}\ x\ (x + 5)$;
4) $f(x) = (x^3 - 2)\ /\ \cos x$;
5) $f(x) = (x^4 - 5) \cdot (x + 2)$;
6) $f(x) = (2x^4 - 1)^6$;
7) $f(x) = \sqrt{5 - x^3}$.

Вариант 10.

1) $f(x) = 5x^4 - 8x + 3$;
2) $f(x) = 3/x^6 - x^6/3 + 6\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \mathrm{tg}\ x\ (x - 4)$;
4) $f(x) = (x^4 - 1)\ /\ \sin x$;
5) $f(x) = (x^3 - 3) \cdot (x + 4)$;
6) $f(x) = (5x^3 - 4)^5$;
7) $f(x) = \sqrt{2 - x^4}$.

Вариант 11.

1) $f(x) = 3x^8 - 6x - 2{,}5$;
2) $f(x) = 6/x^3 - x^7/2 + 2\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \cos x\ (5 - x^3)$;
4) $f(x) = (x + 2)\ /\ \cos x$;
5) $f(x) = (5x^3 - 1) \cdot (x + 3)$;
6) $f(x) = (3x^6 - 2)^9$;
7) $f(x) = \cos 5x$.

Вариант 12.

1) $f(x) = 5x^6 - 8x - 4{,}5$;
2) $f(x) = 3/x^9 - x^7/4 + 4\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \cos x\ (3 - x^2)$;
4) $f(x) = (x + 6)\ /\ \sin x$;
5) $f(x) = (3x^4 - 1) \cdot (x + 5)$;
6) $f(x) = (2x^7 - 3)^{14}$;
7) $f(x) = \sin 3x$.

Вариант 13.

1) $f(x) = 6x^8 - 7x - 1{,}5$;
2) $f(x) = 2/x^3 - x^8/9 + 12\sqrt{x}$;
3) $f(x) = (x - 4)\ \mathrm{ctg}\ x$;
4) $f(x) = (2 - x^3)\ /\ \sin x$;
5) $f(x) = (6x^3 - 3) \cdot (x + 4)$;
6) $f(x) = (3x^5 - 5)^7$;
7) $f(x) = \mathrm{tg}\ (x/2)$.

Вариант 14.

1) $f(x) = 2x^{12} - 8x - 13$;
2) $f(x) = 4/x^7 - x^7/10 + 2\sqrt{x}$;
3) $f(x) = (x - 3)\ /\ \mathrm{ctg}\ x$;
4) $f(x) = (x^3 + 1)\ /\ \sin x$;
5) $f(x) = (5x^4 - 4) \cdot (x + 2)$;
6) $f(x) = (4x^5 - 1)^{13}$;
7) $f(x) = \mathrm{ctg}\ (x/7)$.

Вариант 15.

1) $f(x) = 3x^5 - 12x - 2$;
2) $f(x) = 2/x^{12} - x^4/8 + 8\sqrt{x}$;
3) $f(x) = (x + 2)\ /\ \cos x$;
4) $f(x) = (5 - x)\ /\ \sin x$;
5) $f(x) = (6x^5 - 3) \cdot (x + 2)$;
6) $f(x) = (5x^3 - 3)^7$;
7) $f(x) = \sin\ (2x - \pi/3)$.

Вариант 16.

1) $f(x) = 2x^8 - 8x - 9$;
2) $f(x) = 3/x^8 - x^5/4 + 6\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \sin x\ (3x^9 - 1)$;
4) $f(x) = (5x + 3)\ /\ \cos x$;
5) $f(x) = (3x^5 - 1) \cdot (x + 5)$;
6) $f(x) = (6x^6 - 2)^6$;
7) $f(x) = \cos\ (3x + \pi/4)$.

Вариант 17.

1) $f(x) = 3x^7 - 4x - 10$;
2) $f(x) = 2/x^3 - x^{10}/10 + 4\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \cos x\ (2x^4 - 1)$;
4) $f(x) = (x + 5)\ /\ \sin x$;
5) $f(x) = (2x^4 - 4) \cdot (x + 3)$;
6) $f(x) = (5x^5 - 3)^9$;
7) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

Вариант 18.

1) $f(x) = 5x^8 - 8x + 1$;
2) $f(x) = 6/x^2 - x^6/5 + 2\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \sin x\ (x^4 - 4)$;
4) $f(x) = (x - 6)\ /\ \cos x$;
5) $f(x) = (3x^5 - 1) \cdot (x + 4)$;
6) $f(x) = (3x^6 - 2)^8$;
7) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$.

Вариант 19.

1) $f(x) = 6x^4 - 2x + 7$;
2) $f(x) = 4/x^5 - x^7/4 + 8\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \text{ctg } x\ (x + 5)$;
4) $f(x) = (x^5 - 2) / \cos x$;
5) $f(x) = (x^6 - 5) \cdot (x + 2)$;
6) $f(x) = (2x^8 - 1)^5$;
7) $f(x) = \sqrt{2 - x^5}$.

Вариант 20.

1) $f(x) = 5x^6 - 8x + 3$;
2) $f(x) = 3/x^8 - x^9/3 + 6\sqrt{x}$;
3) $f(x) = \text{tg } x\ (x - 4)$;
4) $f(x) = (x^6 - 1) / \sin x$;
5) $f(x) = (x^4 - 3) \cdot (x + 4)$;
6) $f(x) = (5x^6 - 4)^7$;
7) $f(x) = \sqrt{3 - x^5}$.

№ 60.

Определите производные функций.

1) а) $y = 10^{\sin^2 3x}$; б) $y = \ln\dfrac{3x^2 - 1}{x + 1}$.
2) а) $y = e^{\sqrt{x}} \cdot \cos 5x$; б) $y = e^{-2x}$.
3) а) $y = \left(1 + \ln\dfrac{1}{x}\right)^5$; б) $y = 2^{5x^2}$.
4) а) $y = \dfrac{\cos x}{x}$; б) $y = \ln(x^2 + 2)$.
5) а) $y = e^x \cdot \cos x$; б) $y = \sin^4 2x$.
6) а) $y = 3\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + 3x^2$; б) $y = \sqrt{\text{tg}\, 2x}$.
7) а) $y = \cos x \cdot \ln x$; б) $y = e^{\text{tg} 3x}$.
8) а) $y = \dfrac{x}{e^x}$; б) $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$.
9) а) $y = \dfrac{6x + 1}{4x + 3}$; б) $y = \ln(\sin 2x)$.
10) а) $y = e^x \cdot x^2$; б) $y = \ln(\cos 3x)$.

№ 61.

Найдите производные функций:

1) а) $y = 4x^3 + 2x - 3$; б) $y = \text{tg}^4\, 3x$.
2) а) $y = 5x - 6/x^2 + 2\sqrt[4]{x} + 8$; б) $y = e^{x/3}$.
3) а) $y = (3x + 1) \cdot \text{ctg } x$; б) $y = \sqrt[4]{3x - 1}$.
4) а) $y = \cos x/x$; б) $y = \ln(2x^3 + 4)$.
5) а) $y = 3x \cdot \ln x$; б) $y = \sin^3(x/4)$.

6) а) $y = 4x^5 - 3/x + 5\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{\cos 3x}$.
7) а) $y = x \cdot \sin x$; б) $y = \ln \cos 4x$.
8) а) $y = e^x/x$; б) $y = \ln(x^2 - 3x + 4)$.
9) а) $y = \dfrac{2x + 4}{3x - 1}$; б) $y = e^{\sin 4x}$.
10) а) $y = 2x \cdot e^x$; б) $y = \ln \sin 2x$.

№ 62.

Найдите производные второго порядка от функций:

1) $y = \text{ctg } x$; 2) $y = \arcsin(x/2)$;
3) $y = \cos^2 x$; 4) $y = x \sin x$;
5) $y = (x + 1) / (x - 1)$; 6) $y = x \arccos x$;
7) $y = \ln(2x - 3)$; 8) $y = \text{arctg}(1/x)$;
9) $y = e^{-2x}$; 10) $y = \sqrt{1 + x^2}$.

Вопросы по теме

1. *Что такое приращение аргумента? Приращение функции?*
2. *Дайте определение производной функции.*
3. *Что такое дифференцирование?*
4. *Перечислите основные правила дифференцирования.*
5. *Какие формулы из таблицы производных используются чаще всего?*
6. *Перечислите формулы производных обратных тригонометрических функций.*
7. *Как находится вторая производная для функции?*
8. *Дайте определение производной высшего порядка.*
9. *Где используется понятие производной и ее приложения?*
10. *В чем заключается геометрический смысл дифференциала?*

Тема 2.4. Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Термины

- Дифференциал функции
- Правила вычисления дифференциалов
- Геометрический смысл дифференциала
- Приближенные вычисления
- Дифференциал второго порядка

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциал функции

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f(x_0)$, то произведение $f(x_0)$ и Δx называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Таким образом, $df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x$.

Для функции $f(x)$, имеющей производную в каждой точке интервала (a, b), можно записать $df(x) = f'(x)\,\Delta x$, где Δx — произвольное приращение аргумента.

Так как $dx = (x)'\,\Delta x = \Delta x$, определим дифференциал независимой переменной как ее приращение, тогда дифференциал функции $f(x)$: $df(x) = f'(x) \cdot dx$.

Значит, $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$, т.е. обозначение $\dfrac{df(x)}{dx}$ для производной от функции $f(x)$ можно понимать как дробь, в числителе которой стоит дифференциал функции $f(x)$, а в знаменателе — дифференциал аргумента. Для дифференцируемых функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ справедливы равенства:

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$,
2) $d(uv) = udv + vdu$,

3) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Примеры вычисления дифференциалов

1) Найдем дифференциал функции через приращение. Пусть $y = x^3$, тогда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

главная часть при $\Delta x \to 0$ равна $3x^2 \cdot \Delta x$, поэтому $dy = 3x^2\,dx$.

В следующих примерах найдем дифференциал по определению.

2) $d(x^2) = 2xdx$.
3) $d(5x^4 + 7x - 2) = (5x^4 + 7x - 2)'dx = (20x^3 + 7)dx$.
4) $d(\sin x + x) = (\sin x + x)'dx = (\cos x + 1)dx$.
5) $dC = 0$, (C – const).
6) $d(\sin x) = \cos x\,dx$.
7) $d(\cos x) = -\sin x\,dx$.
8) $da^x = a^x \ln a dx$, ($de^x = e^x dx$).
9) $dx^n = n\,x^{n-1}\,dx$ (n — положительное число).

Теперь установим связь между дифференцируемостью функции в точке и ее производной в той же точке.

Для дифференцируемости функции f в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке, тогда в этом случае $dy = f'(x)dx$.

Из формулы получаем новое обозначение для производной $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то дифференциал функции f в точке x_0 равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0, при переходе от точки касания в точку с абсциссой $x_0 + \Delta x$.

Вообще $dy \neq \Delta y$, но при малых Δx приращение функции приблизительно равно дифференциалу функции, т. е. $dy \approx \Delta y$.

Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

Для дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$, у которой $f'(x_0) \neq 0$, при достаточно малых Δx справедливо приближенное равенство $\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Так как $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, то $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$.

Вычислите $\sqrt{3{,}998}$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$.

Для этой функции $\sqrt{x} = \sqrt{x_0} + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (x - x_0)$.

Подставляем $x = 3{,}998$ и $x_0 = 4$:

$$\sqrt{3{,}998} = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (3{,}998 - 4) = 2 - \frac{0{,}002}{4} = 1{,}9995.$$

Ответ: 1,9995.

Понятие о дифференциалах высших порядков

Производная $f'(x)$ от функции $F(x)$ называется производной первого порядка и представляет собой некоторую функцию. И если эта функция тоже имеет производную, тогда производная от производной первого порядка называется производной второго порядка и обозначается $f''(x)$, т.е. $f''(x) = [f'(x)]'$.

Аналогично определяется производная $f^{(n)}(x)$ любого порядка $n = 1, 2, \ldots$; если существует производная $f^{(n-1)}(x)$ n–1 порядка, то под производной нулевого порядка подразумевается сама функция $f^{(0)}(x) = y = f(x)$.

Согласно определению производной в точке x_0 получим

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x},\ n = 1, 2\ldots$$

Замечание. Когда говорят, что f имеет в точке x_0 производную порядка n, то это значит, что в некоторой окрестности точки x_0 у функции f существуют все производные низших порядков.

Пусть x — независимая переменная и $y = f(x)$ есть дифференцируемая функция на некотором интервале (a, b). Тогда $df(x) = f'(x)dx$ есть функция двух переменных: x и dx.

Будем предполагать, что dx — дифференциал независимой переменной x — имеет произвольное, но фиксированное значение.

Если существует вторая производная $f''(x)$, то $df(x)$ имеет дифференциал и он называется вторым дифференциалом.

Определение. Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) $d^2 f(x)$ функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции

$$d^2 f(x) = d\,[df(x)].$$

Аналогично дифференциал третьего порядка

$$d^3 f(x) = d\,[d^2 f(x)].$$

Так последовательно определяются дифференциалы высших порядков.

Выведем формулу для дифференциала второго порядка. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируема (т.е. имеет вторую производную), так как $df(x) = f'(x)dx$, тогда по определению дифференциала имеем

$$d^2 f(x) = d\,[df(x)].$$

Если x — независимая переменная, то dx, равный Δx, очевидно, не зависит от x, по отношению к переменной x играет роль постоянной.

$$d^2 f(x) = d\,[f'(x)dx] = dx \cdot d\,[f'(x)] =$$

$$= \{f'(x) \text{ — снова некоторая функция от } x\} =$$

$$= [f''(x)dx]\,dx = f''(x)dx^2, \text{ где } dx^2 = (dx)^2.$$

Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема. Дифференциал второго порядка от данной функции равен произведению производной второго порядка этой функции на квадрат дифференциала независимой переменной.

Если положить $f(x) = y$, то $d^2 y = y''dx^2$, и тогда

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Задания для самостоятельной работы

№ 63.

1) Найдем дифференциал функции через приращение.

Пусть $y = x^3$, тогда $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 - \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)$, главная часть при $\Delta x \to 0$ равна $3x^2\Delta x$, поэтому $dy = 3x^2dx$.

В следующих примерах найдем дифференциал по определению.

2) $d(x^2) = 2xdx$;
3) $d(5x^4 + 7x - 2) = (5x^4 + 7x - 2)'dx = (20x^3 + 7)\,dx$;
4) $d(\sin x + x) = (\sin x + x)'dx = (\cos x + 1)dx$;
5) $dC = 0$, (C — Const);
6) $d\sin(x) = \cos(x)dx$;
7) $d\cos(x) = -\sin(x)dx$;
8) $da^x = a^x \ln a dx$, $(de^x = e^x dx)$;
9) $dx^n = n\, x^{n-1}dx$ (n — положительное число).

№ 64.

Вычислить $\sqrt{4,21}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$.

Для этой функции $\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot (x - x_0)$.

Подставляем $x = 4,21$ и $x_0 = 4$.

$$\sqrt{4,21} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (4,21 - 4) = 2 + \frac{0,21}{4} = 2,0525 \approx 2,05.$$

Ответ: 2,05.

№ 65.

Найдите дифференциал функции: $y(x) = \frac{e^x - 7}{\sin x}$.

Решение:

По определению дифференциал функции

$$dy = y'(x)\,dx.$$

Заданная функция представляет собой отношение двух функций:

$$U(x) = e^x - 7 \text{ и } V(x) = \sin x.$$

Используя правила дифференцирования дробной функции, находим производную

$$y'(x) = \frac{(e^x - 7)' \cdot (\sin x) - (e^x - 7) \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} =$$

$$= \frac{e^x \sin x - e^x \cos x + 7\cos x}{\sin^2 x}.$$

Окончательно получаем

$$dy = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x + 7\cos x}{\sin^2 x} dx.$$

№ 66.

Найдите приближенное значение функции с помощью дифференциала.

Вычислите: $\sqrt[3]{8,3}$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$;

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$(8,3)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} + \frac{(8,3 - 8)}{3\sqrt[3]{8^2}} = 2 + \frac{0,3}{12} = 2,025.$$

Ответ: 2,025.

№ 67.

Вычислите: а) $1,015^2$; б) $0,988^3$; в) $\sqrt{1,03}$; г) $\sqrt[3]{0,964}$.

Решение:

Используем формулы, выведенные с помощью дифференциала для чисел, близких к единице, α — малое число по сравнению с единицей.

1) $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$; 2) $(1-\alpha)^n \approx 1 - n\alpha$;

3) $\sqrt[n]{1+\alpha} = 1 + \dfrac{1}{n}\alpha$.

а) $1{,}015^2 = (1+0{,}015)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}015 \approx 1{,}03$;
б) $0{,}988^3 = (1-0{,}012)^3 = 1 - 3 \cdot 0{,}012 \approx 0{,}964$;

в) $\sqrt{1{,}03} = \sqrt{1+0{,}03} = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}03 \approx 1{,}015$;

г) $\sqrt[3]{0{,}964} = \sqrt[3]{1-0{,}036} \approx 1 - \dfrac{1}{3} \cdot 0{,}036 \approx 0{,}988$.

Ответ: а) 1,03; б) 0,964; в) 1,015; г) 0,988.

№ 68.

1) $y = x^2 - 2x$. Найдите приближенно, с помощью дифференциала, изменение y (т. е. Δy), когда x изменяется от 3 до 3,01.

Решение:

Имеем $\Delta y \approx dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

$f'(x) = 2x - 2$, $f'(3) = 4$, $\Delta x = 0{,}01$.

Поэтому $\Delta y \approx 4 \cdot 0{,}01 = 0{,}04$.

Ответ: 0,04.

2) Вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt[4]{x}$ в точке $x = 17$.

Решение:

Пусть $x_0 = 16$.

Тогда $\Delta x = x - x_0 = 17 - 16 = 1$,

$$f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2,\ f'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x_0^{\,3}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2^3}} = \frac{1}{32}.$$

Таким образом, $f(x) \approx 2 + \dfrac{1}{32} \cdot 1 = \dfrac{65}{32} \approx 2{,}031$.

Ответ: 2,031.

3) Вычислите $\ln 0{,}99$.

Решение:

Будем рассматривать это значение как частное значение функции $y = \ln x$ при $x = 0{,}99$.

Положим $x_0 = 1$. Тогда $\Delta x = -0{,}01$, $f(x_0) = 0$.

$y' = \dfrac{1}{x}$; $f(1) = 1$. Поэтому $f(0{,}99) \approx 0 - 0{,}01 = -0{,}01$.

Ответ: –0,01.

№ 69.

Найдите дифференциал функции $y = f(x)$.

Вариант 1. $y = \dfrac{\sin x}{2x+16}$.

Вариант 2. $y = \dfrac{x^4+1}{e^x}$.

Вариант 3. $y = \dfrac{\cos x}{5x+9}$.

Вариант 4. $y = \dfrac{x^3-2}{e^x}$.

Вариант 5. $y = \dfrac{x^5+8}{\sin x}$.

Вариант 6. $y = \dfrac{3x^2-4}{\cos x}$.

Вариант 7. $y = \dfrac{5x^3+2}{e^x}$.

Вариант 8. $y = \dfrac{e^x+6}{x^2}$.

Вариант 9. $y = \dfrac{e^x+6}{x^3}$.

Вариант 10. $y = \dfrac{4x^2-2}{5-3x^4}$.

№ 70.

Вычислите приближенное значение выражения с помощью дифференциала:

1) $\sqrt{9{,}02}$; 2) $\sqrt{15{,}5}$; 3) $\sqrt{4{,}1}$; 4) $\sqrt[3]{1{,}1}$; 5) $\sqrt[3]{8{,}2}$;

6) $\sqrt[3]{-27{,}3}$; 7) $\sqrt{24{,}9}$; 8) $\sqrt{8{,}75}$; 9) $\sqrt[3]{1{,}2}$; 10) $\sqrt[4]{16{,}3}$.

Вопросы по теме

1. *Что такое дифференциал функции?*
2. *Перечислите основные правила вычисления дифференциалов.*
3. *Как определяется приближенное значение приращения функции, вычисленное с помощью дифференциала в точке?*
4. *В чем заключается геометрический смысл дифференциала?*
5. *Где используется понятие дифференциала?*

Тема 2.5. Геометрические приложения производной

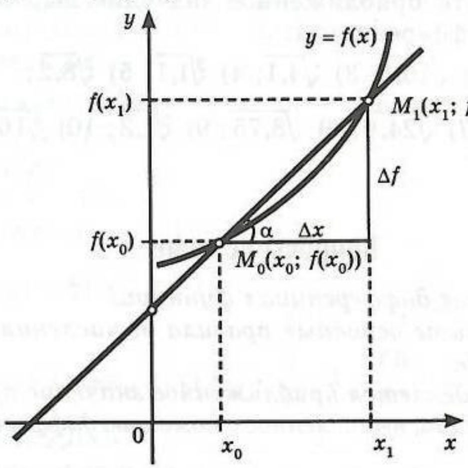
Термины

- Уравнение касательной
- Экстремум функции
- Геометрический смысл производной
- Исследование функций с помощью производной
- Наибольшее и наименьшее значения функции

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Геометрический и физический смысл производной

Пусть кривая является графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $x \in (a;\, b)$. На кривой рассмотрим точки $M_0(x_0;\, y_0)$ и $M_1(x_1;\, y_1)$ и проведем секущую M_0M_1.



Угловой коэффициент этой прямой $k = \operatorname{tg} \beta$:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Пусть теперь $x_1 - x_0$, т.е. абсцисса точки M_1 приближается к абсциссе точки M_0, и, следовательно, точка M_1 стремится к точке M_0, оставаясь на кривой $y = f(x)$. При этом секущая $M_0\,M_1$ меняет свое положение, вращаясь вокруг точки M_0, т.е. изменяет угол β. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

и, следовательно, существует прямая M_0T, являющаяся предельным положением секущей при приближении точки M_1 по кривой к M_0. Эта прямая называется касательной к кривой в точке M_0. Таким образом, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее график имеет касательную в точке $M_0(x_0;\, f(x_0))$, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0)$. Геометрическое истолкование производной: производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x_0;\, f(x_0))$.

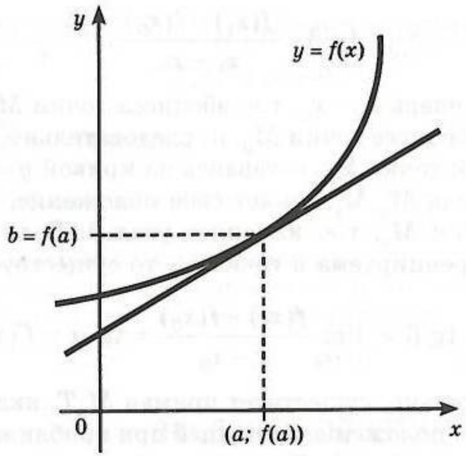
Понятие производной применяют во многих физических задачах, например:

1) нахождение скорости движения $v(t) = x'(t)$;
2) нахождение линейной плотности неоднородного стержня $p(x) = m'(x)$;
3) задача о теплоемкости тела при нагревании;
4) задача о нахождении угловой скорости вращающегося тела и т. д.

В математике производную чаще всего используют для исследования функций и решения задач алгебры и начал анализа.

Уравнение касательной

Касательной прямой к произвольной кривой в точке A называют предельное положение секущей прямой AM, когда точка M приближается к точке A (см. рисунок).



Для того чтобы успешно решать задачи о касательных к графикам, достаточно знать общий вид уравнения касательной к графику функции f в точке с абсциссой a (см. рисунок) и понимать, что означают входящие в него выражения. Прежде всего отметим, что уравнение задает прямую. Чаще уравнение прямой записывают в виде $y = kx + b$, и наше уравнение легко приводится к этому виду.

Но самое важное соображение состоит в том, что, как следует из определений касательной и производной, угловой коэффициент k равен производной $f'(a)$ функции в точке касания. Потому уравнение и имеет вид

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

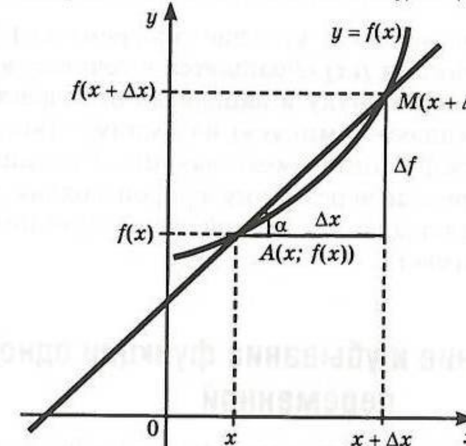
Обычно записывается в другом виде:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0).$$

Уравнение прямой, не параллельной оси ординат, имеет вид $y = kx + b$, где угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона α прямой к оси Ox, а свободный член b — это ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Пусть касательная пересекает график в точках A и M с абсциссами x и $x + \Delta x$. Тогда разность ординат этих точек равна приращению $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$, которое получает функция, когда ее аргумент изменяется на Δx.

Таким образом, угловой коэффициент секущей равен тангенсу разностного отношения $\Delta f/\Delta x$ для точек A и M.



Из определений производной и касательной следует, что угловой коэффициент касательной равен производной в точке касания. Точнее говоря, функция f дифференцируема при $x = a$ тогда и только тогда, когда в точке с абсциссой a можно провести невертикальную касательную к ее графику; при этом угловой коэффициент касательной равен значению производной функции f в точке a.

Теоремы приложения производной

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$, неубывающая (невозрастающая) на нем, то ее производная в этом интервале не отрицательна (не положительна), т.е. $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$, удовлетворяет в нем условию $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то эта функция возрастает (убывает) в интервале $(a; b)$.

Максимум и минимум функции называется *экстремумом функции.*

Теорема 3. (Необходимое условие экстремума.) Если функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$, имеет

6. Зак. 475

в точке x_0, $a < x < b$ экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

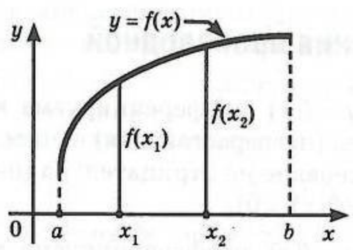
Теорема 4. (Достаточное условие экстремума.) Если производная функции $f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль и при переходе через точку в направлении возрастания x меняет знак «плюс» («минус») на «минус» («плюс»), то в точке x_0 эта функция имеет максимум (минимум). Если же при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ не меняет знак, то в этой точке функция $f(x)$ экстремума не имеет.

Возрастание и убывание функции одной переменной

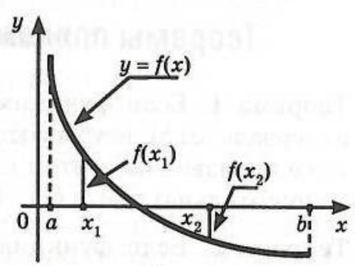
Сформулируем теорему о монотонности функции.

Если $f'(x) > 0$ на промежутке $(a; b)$, то на $(a; b)$ функция $f(x)$ возрастает. Если $f'(x) < 0$ на промежутке $(a; b)$, то на $(a; b)$ функция $f(x)$ убывает.

Функция $f(x)$ *возрастает* на промежутке (a, b), если из того, что $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)\ \forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$. И $f(x)$ *убывает* на промежутке (a, b), если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)\ \forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$. На рисунке *a*) показана возрастающая функция, на рисунке *b*) – убывающая.



a



b

Теорема (*необходимый признак возрастания* (*убывания*) *функции*).

1. Если $f(x)$ возрастает и дифференцируема на $(a, b) \Rightarrow f'(x) \geqslant 0\ \ \forall\ x \in (a, b)$.

2. Если $f(x)$ убывает и дифференцируема на $(a, b) \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Доказательство:

1) Пусть $f(x)$ — дифференцируема и возрастает на (a, b). Согласно определению производной,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если x, $x + \Delta x \in (a, b)$, то в силу возрастания знак приращения функции $f(x + \Delta x) - f(x)$ совпадает со знаком приращения Δx (где $\Delta x \neq 0$). Следовательно,

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0. \qquad (*)$$

Переходя в (*) к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем $f'(x) \geqslant 0$.

2) Доказательство второй части теоремы аналогично.

Если f убывает, то, согласно определению, $x_2 > x_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) — f(x) \leqslant 0$, следовательно, $f'(x) \leqslant 0$.

Теорема (*достаточный признак возрастания и убывания функции*).

1. Если $f'(x) > 0$, $\forall\ x \in (a, b)$, тогда $f(x)$ возрастает на этом промежутке.
2. Если $f'(x) < 0$, $\forall\ x \in (a, b)$, тогда $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ такая, что $f'(x) > 0$ при $a < x < b$. В силу теоремы Лагранжа $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$ можно записать

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),\text{ где } \xi \in (x_1, x_2),$$
$$\text{т.е. } a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

Но так как $f'(\xi) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$. По определению $f(x)$ — возрастает.

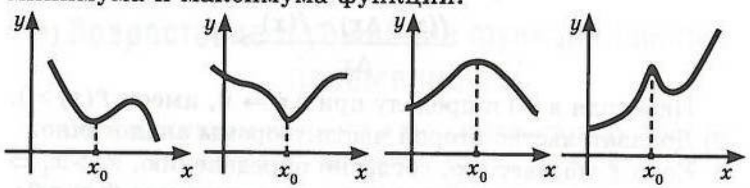
2) Доказывается аналогично.

Замечание. Если функция $f(x)$ возрастает или $f(x)$ убывает, то она называется *монотонной*. Промежутки возрастания или убывания функции называются *промежутками монотонности*.

Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие $f(x) > f(x_0)$.

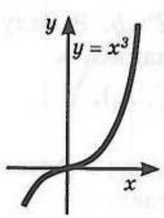
Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие $f(x) < f(x_0)$. На рисунке даны примеры точек минимума и максимума функций:



Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Сформулируем теорему о необходимом условии экстремума функции: **если в точке экстремума функция $f(x)$ имеет производную, то производная равна нулю.**

Отсюда следует, что точки экстремума функции следует искать среди тех точек ее области определения, где производная функции равна нулю.



Если $f'(x_0) = 0$, это еще не значит, что в точке x_0 есть экстремум. Примером может служить функция $y = x^3$. В точке $x = 0$ ее производная равна нулю, но экстремума функция не имеет. График функции изображен на рисунке.

Точка, в которой производная равна нулю, называется **стационарной**.

Точки области определения функции, в которых производная либо равна нулю либо не существует, называются **критическими**.

Как было показано выше, с помощью необходимого условия нельзя определить, является ли данная точка точкой экстремума, тем более указать, какой экстремум

реализуется — максимум или минимум. Для того чтобы ответить на эти вопросы, сформулируем и докажем теорему, которая называется **достаточным условием экстремума.**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если $f'(x) < 0$ на $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на $(x_0; b)$, то точка x_0 — точка минимума функции $f(x)$;

2) если $f'(x) > 0$ на $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на $(x_0; b)$, то точка x_0 — точка максимума функции $f(x)$.

Докажем первое утверждение теоремы.

Так как $f'(x) < 0$ на $(a; x_0)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(x)$ убывает на $(a; x_0]$, и для любого $x \in (a; x_0)$ выполняется условие $f(x) > f(x_0)$.

Так как $f'(x) > 0$ на $(x_0; b)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(x)$ возрастает на $(x_0; b]$, и для любого $x \in (x_0; b)$ выполняется условие $f(x) > f(x_0)$.

В результате получается, что при любом $x \neq x_0$ из $(a; b)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, т. е. точка x_0 — точка минимума $f(x)$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Исследование функции с помощью производной

Исследование функции с помощью производной проводится по следующей схеме.

1. Область определения функции:

$D(f)$ — значения x, при которых функция существует.

2. Четность или нечетность функции:

Функция четная, если $f(-x) = f(x)$, график симметричен относительно оси Oy;

функция нечетная, если $f(-x) = -f(x)$, график симметричен относительно начала координат.

3. Точки пересечения графика с осями координат:

с осью Oy: $x = 0$, находим y;

с осью Ox: $y = 0$, находим x.

4. Находим производную $f'(x)$.

5. **Находим критические точки функции — точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.**

$f'(x) = 0$. Строим интервалы. Точки, в которых производная равна 0 или не существует, разбивают область определения $f(x)$ на промежутки, в которых $f'(x)$ сохраняет постоянный знак.

6. **Находим промежутки возрастания и убывания функции — определяем знак производной в какой-либо точке методом интервалов:**

если $f'(x) > 0$, то функция возрастает;

если $f'(x) < 0$, то функция убывает.

7. **Находим точки экстремума функции – точки максимума и минимума:**

если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка максимума;

если в точке x_0 $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка минимума.

8. **Находим значения функции $f(x)$ в точках экстремума $f(x_{min})$ и $f(x_{max})$ — экстремумы функции.**
9. **Находим $f''(x)$:**

если $f''(x) > 0$, то функция вогнутая;

если $f''(x) < 0$, то функция выпуклая.

10. **Находим дополнительные точки для исследования поведения функции при $+\infty$ и при $-\infty$.**
11. **Строим график.**

Рассмотрим исследование функции на примере: исследование и построение графика функции $f(x) = x^3 - 3x$.

1. $D(f) = R$, $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x)$.

$f(-x) = -f(x)$ — функция нечетная, т.е. график симметричен относительно начала координат.

3. Находим точки пересечения с осями координат:

с осью Oy: $x = 0$, $y = 0$ $(0; 0)$;

с осью Ox: $y = 0$.

$x^3 - 3x = 0$;

$x(x^2 - 3) = 0$; $x^2 = 3$;

$x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{3}$; $x_3 = -\sqrt{3}$.

4. Находим производную функции:

$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$.

5. Находим критические точки функции:

$f'(x) = 0$;

$3x^2 - 3 = 0$;

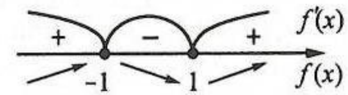
$x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

6. Находим промежутки возрастания и убывания функции:

$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 =$
$= 12 - 3 = 9 > 0$.

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$.

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 =$
$= 12 - 3 = 9 > 0$.



7. Находим точки экстремума функции:

$x_{max} = -1$; $x_{min} = 1$.

8. Находим значения функции $f(x)$ в точках экстремума:

$x_{max} = -1$; $y_{max} = f(x_{max}) = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) =$
$= -1 + 3 = 2$;

$x_{min} = 1$; $y_{min} = f(x_{min}) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$.

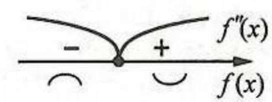
9. Заполняем таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	α	↘	–α	↗
		max		min	

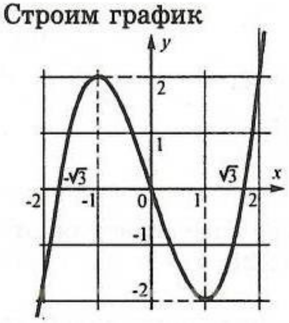
10. $f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$;

$f''(x) = 0$;

$x = 0$.



11. Строим график



Задания для самостоятельной работы

№ 71.

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 3x - 1$ в точке M с абсциссой -2. Запишите угловой коэффициент этой касательной.

Решение:

Подставим $x_0 = -2$ в общее уравнение касательной:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0).$$

Вычислим значение функции:

$$f(x) = f(-2) = (-2)^3 - 3\ (-2) - 1 = -8 + 6 - 1 = -3,$$

производную $f'(x) = 3x^2 - 3$ и ее значение в точке касания: $f'(-2) = 3\ (-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9.$

Подставив эти значения в уравнение, получим

$$y = 9(x + 2) - 3 = 9x + 15.$$

Угловой коэффициент касательной равен 9.

Ответ: $y = 9x + 15$.

№ 72.

Составьте уравнение касательной для данной функции в точке касания x_0:

1) $f(x) = 2x - x^2,\ x_0 = 2.$
2) $f(x) = x^2 + 1,\ x_0 = 1.$
3) $f(x) = x^3 - 1,\ x_0 = -1.$
4) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4,\ x_0 = 0.$
5) $f(x) = 8 - x^2,\ x_0 = 2.$
6) $f(x) = 5x - x^2,\ x_0 = 1.$
7) $f(x) = x^3 - 3x,\ x_0 = -1.$
8) $f(x) = 4x^2 - 2x + 14,\ x_0 = -1.$
9) $f(x) = 6 - 2x - x^2,\ x_0 = -2.$
10) $f(x) = 3x - 6x^2,\ x_0 = -1.$

№ 73.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение:

Найдем производную функции и приравняем ее к нулю для определения точек экстремума на отрезке:

$$y' = 3x^2 - 3;\ \ y' = 0;\ \ 3x^2 - 3 = 0.$$

Значит, критические точки $x_{1,2} = \pm 1$.

Обе точки принадлежат данному отрезку.

Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка:

$$y(-1) = 6;$$
$$y(1) = 2;$$
$$y(2) = 0.$$

Значит, наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-1; 2]$ равно 6 при $x = -1$, а наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-1; 2]$ равно 2 при $x = 2$.

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} y(x) = y(-1) = 6;$

$\min\limits_{[-1;2]} y(x) = y(2) = 0.$

№ 74.

1) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ на отрезке $[2; 5]$.
2) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 5x^2 - 8x + 1$ на отрезке $[-5; -2]$.
3) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 15x^2 - x^3$ на отрезке $[-1; 10]$.
4) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 6 + 27x - x^3$ на отрезке $[-3; 4]$.
5) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 5 + 6x - x^2$ на отрезке $[-2; 4]$.
6) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 6x^2 - x^3$ на отрезке $[-2; 3]$.
7) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2 + 4x - 6$ на отрезке $[-2; 0]$.
8) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[0; 3]$.
9) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^5 - 5x^3$ на отрезке $[2; 3]$.
10) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x + 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

Вопросы по теме

1. *В чем заключается геометрический смысл производной?*
2. *Какая прямая называется касательной к графику функции?*
3. *Как записывается уравнение касательной к графику функции?*
4. *Как находится угловой коэффициент касательной к графику функции?*
5. *Чему равно значение производной в точке касания?*
6. *Каковы правила нахождения точек экстремума функции?*
7. *Сформулируйте достаточный признак возрастания и убывания функции.*
8. *Как находятся наибольшее и наименьшее значения функции?*
9. *Каков алгоритм исследования функций с помощью производной?*
10. *Какие свойства функции рассматриваются при ее исследовании с помощью производной?*

Тема 2.6. Первообразная и неопределенный интеграл. Замена переменной в неопределенном интеграле

Термины

- Первообразная
- Неопределенный интеграл
- Табличный интеграл
- Методы интегрирования
- Непосредственное интегрирование
- Метод замены переменной
- Интегрирование по частям
- Пределы интегрирования
- Подынтегральная функция

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Первообразная

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все ее первообразные содержатся в выражении $F(x)+C$, где C — постоянная.

Свойства первообразной

1) Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ задаются формулой $F(x)+C$, $C \in R$.
2) Первообразная суммы двух или нескольких функций равна сумме первообразных этих функций. Если F есть первообразная для f, а G — первообразная для g, то $F+G$ есть первообразная для $f+g$.
3) Постоянный множитель можно вынести за знак первообразной. Если F есть первообразная для f, а k — постоянная, то функция kF — первообразная для kf.
4) Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k} \cdot F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.

Неопределенный интеграл

Математические операции образуют пары двух взаимно обратных действий, например, сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня. Дифференцирование дает возможность для заданной функции $F(x)$ находить ее производную $F'(x)$. Существует действие, обратное дифференцированию, — это **интегрирование** — нахождение функции $F(x)$ по известной ее производной $f(x)=F'(x)$ или дифференциалу $f(x)\,dx$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от выражения $f(x)\,dx$) называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Здесь $\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования. Отыскание неопределенного интеграла называется *интегрированием функции.*

Свойства неопределенного интеграла

1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:
$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$
2) Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:
$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$
3) Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной и дополнительному слагаемому C:
$$\int d\,(F(x)) = F(x) + C.$$
4) Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:
$$\int C\,f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$
5) Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:
$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int [f_1(x)]\,dx \pm \int [f_2(x)]\,dx.$$

Таблица интегралов находится в приложении 1.

Основные методы интегрирования

Основные методы интегрирования неопределенного интеграла: непосредственное интегрирование, интегрирование замены переменной, интегрирование по частям.

1. Метод непосредственного интегрирования

Непосредственным интегрированием принято называть вычисление неопределенных интегралов путем

приведения их к табличным с применением основных свойств. Здесь могут представиться следующие случаи: 1) данный интеграл берется непосредственно по формуле соответствующего табличного интеграла; 2) данный интеграл после применения свойств приводится к одному или нескольким табличным интегралам; 3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применением свойств приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2. Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки)

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \phi(t)$, где $\phi(t)$ — монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид
$$\int f(x) = \int f[\phi(t)]\,\phi'(t)\,d(t);$$

2) $u = \psi(x)$, где u — новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:
$$\int f[\psi(x)]\,\psi'(x)\,d(x) = \int f(u)\,du.$$

3. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int u dv = uv - \int v\,du$, где $u = \phi(x)$, $v = \psi(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv — та часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден.

Кроме этого, существуют различные приемы интегрирования. Рассмотрим некоторые из них.

Рассмотрим примеры.

Пусть $\int x dx = \dfrac{x^2}{2} + C.$

а) Заменим x на $\sin x$, получим

$$\int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C,$$

т. е. $\int \sin x \cos x dx = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C.$

б) Заменим x на $\ln x$:

$$\int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

или

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Важно уметь проводить преобразование $f(x)dx = g(u)\ du$, где u есть некоторая функция от x и g — функция, более простая для интегрирования, чем f.

Отметим несколько преобразований, полезных в дальнейшем:

1. $dx = d(x + b)$, $b = \text{const}$;
2. $dx = \dfrac{1}{a} d(a \cdot x)$, $a - \text{const} \neq 0$;
3. $dx = \dfrac{1}{a} d(a \cdot x + b)$, $a, b - \text{const} \neq 0$;
4. $x dx = \dfrac{1}{2} dx^2$;
5. $\sin x dx = -d(\cos x)$;
6. $\cos x dx = d(\sin x)$;
7. $\phi'(x) dx = d\phi(x)'$.

Рассмотрим примеры.

1. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C;$

2. $\int x \cdot e^{x^2} dx = \dfrac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \dfrac{1}{2} e^{x^2} + C.$

Замечания об интегралах, не выражающихся через элементарные функции.

Теорема (*Коши*). Всякая непрерывная функция имеет первообразную. То есть пусть $f(x)$ — непрерывна, определена на $(a, b) \Rightarrow \exists\ F(x) : F'(x) = f(x)$, и тогда

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Но тем не менее не решается вопрос о том, как найти первообразную с помощью конечного числа известных операций над элементарными функциями. Более того, имеется ряд непрерывных элементарных функций, интегралы от которых не являются элементарными функциями. Такие интегралы называются «неберущимися». Например:

$$\int e^{-x^2} dx;\ \int \frac{e^x}{x^n} dx;\ \int \frac{\sin x}{x^n} dx;\ \int \frac{dx}{\ln x}$$

и ряд других.

Рассмотрим еще несколько примеров.

1) Найдите интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Решение:

В подынтегральной функции разделим почленно числитель на знаменатель. Затем воспользуемся свойством неопределенного интеграла, а также табличной формулой, преобразовав предварительно, если нужно, подынтегральную функцию к виду x^α. Получаем

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3 \right) dx =$$

$$= \int \left(x^{1/6} + \frac{2}{x^{1/2}} - 3 \right) dx = \int x^{1/6} dx + \int \frac{2}{x^{1/2}} dx - 3 \int dx =$$

$$= \frac{x^{1+1/6}}{1+1/6} + 2\frac{x^{1-1/2}}{1-1/2} - 3x + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^7} + 4\sqrt{x} - 3x + C.$$

Ответ: $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^7} + 4\sqrt{x} - 3x + C.$

При вычислении интеграла от суммы функций сумму произвольных постоянных, которая при этом получается, заменяют одной произвольной постоянной и обозначают ее буквой C.

2) Найдите интеграл $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$.

Решение:

Этот интеграл не является табличным. Преобразуем подынтегральную функцию, используя формулу тригонометрии $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, затем используем табличную формулу. Получим

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos x)dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos x dx\right) = \frac{1}{2}(x+\sin x) + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$.

3) Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

Решение:

По табличной формуле, где $a=\sqrt{3}$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ: $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

4) Найдите интеграл $\int \mathrm{ctg}^2\, x dx$.

Решение:

Этот интеграл не является табличным. Преобразуем подынтегральную функцию, используя формулы тригонометрии $\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Получим

$$\int \mathrm{ctg}^2\, x dx = \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1-\sin^2 x dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\mathrm{ctg}\, x - x + C.$$

Ответ: $-\mathrm{ctg}\, x - x + C$.

5) Найдите интеграл $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

Решение:

Этот интеграл не является табличным. Преобразуем числитель следующим образом: $x^2 = x^2+1-1$, затем разделим числитель на знаменатель почленно. Получим

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \mathrm{arctg}\, x + C.$$

Ответ: $x - \mathrm{arctg}\, x + C$.

Замечание. Прибавление и вычитание в числителе подынтегральной функции некоторой константы — это преобразование, часто применяемое при нахождении интегралов. Например:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^2+3} = \int \frac{(x^4-9)+9}{x^2+3} dx = \int \frac{(x^2-3)(x^2+3)+9}{x^2+3} dx =$$

$$= \int (x^2-3)dx + 9\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{x^3}{3} - 3x + \frac{9}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

6) Найдите интеграл $\int \cos x e^{\sin x} dx$.

Решение:

Внесем функцию $\cos x$ под знак дифференциала. Получим $\int \cos x e^{\sin x} dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$.

Ответ: $e^{\sin x} + C$.

7) Найдите интеграл $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение:

Внесем функцию $\arcsin x$ под знак дифференциала. Получим

$$\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sqrt{\arcsin x}\; d\arcsin x = \frac{2}{3}(\arcsin x)^{3/2} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{3}(\arcsin x)^{3/2} + C$.

8) Найдите интеграл $\int x^3 e^{x^4} dx$.

Решение:

Внесем функцию x^3 под знак дифференциала $\left(x^3 dx = \frac{1}{4} dx^4\right)$, затем воспользуемся табличной формулой.

Получим $\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4}\int e^{x^4}(dx^4) = \frac{1}{4}e^{x^4} + C.$

Ответ: $\frac{1}{4}e^{x^4} + C.$

9) Найдите интеграл $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

Решение:

На первом шаге под знак дифференциала подведем функцию x^2: $xdx = \frac{1}{2}dx^2$, затем используем табличную формулу. Тогда

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1+(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C.$

Задания для самостоятельной работы

№ 75.

Найдите неопределенный интеграл $\int x^3 dx$.

Решение:

Применяем табличный интеграл, где $\alpha = 3$.

Получаем: $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C.$

Ответ: $\frac{x^4}{4} + C.$

№ 76.

Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение:

Подынтегральная функция — это дробь $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Запишем ее в виде степенной функции, а именно: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$.

Затем используем табличную формулу при $\alpha = -\frac{1}{3}$. Получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$$

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C.$

№ 77.

Найдите интеграл $\int 3^x dx$.

Решение:

Используя табличную формулу, где $a = 3$, получим

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Ответ: $\frac{3^x}{\ln 3} + C.$

№ 78.

Найдите интеграл $\int \frac{dx}{10+x^2}$.

Решение:

По табличной формуле, где $a = \sqrt{10}$, получаем

$$\int \frac{dx}{10+x^2} = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}} + C.$

№ 79.

Найдите интеграл $\int \frac{dx}{7-x^2}$.

Решение:

По табличной формуле, где $a = \sqrt{7}$, получаем

$$\int \frac{dx}{7-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln\left|\frac{\sqrt{7}+x}{\sqrt{7}-x}\right| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln\left|\frac{\sqrt{7}+x}{\sqrt{7}-x}\right| + C.$

№ 80.

Найдите интеграл $\int \sin(5x+4)dx$.

Решение:

Внесем линейную функцию $(5x+4)$ под знак дифференциала: $dx = \frac{1}{5}d(5x+4)$.

Далее воспользуемся табличной формулой

$$\int \sin(5x+4)dx = \frac{1}{5}\int \sin(5x+4)d(5x+4) = -\frac{1}{5}\cos(5x+4) + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}\cos(5x+4) + C.$

№ 81.

Найдите интеграл $\int (2-3x)^{100}dx$.

Решение:

$$\int (2-3x)^{100}dx = -\frac{1}{3}\int (2-3x)^{100}d(2-3x) = -\frac{1}{3}\frac{(2-3x)^{101}}{101} + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}\frac{(2-3x)^{101}}{303} + C.$

№ 82.

Найдите интеграл $\int \frac{1}{7-x}dx$.

Решение:

$$\int \frac{1}{7-x}dx = -\int \frac{d(7-x)}{7-x} = -\ln|7-x| + C.$$

Ответ: $-\ln|7-x| + C.$

№ 83.

Найдите интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d3x}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C.$

№ 84.

Заполните таблицу, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$:

$f(x)$	25	x^8	$3x^2$	x^{-7}	$x^{11}-2+2x$	$15x-20x^{10}$	$12x^5 - 3x^{-4}$	$\sin x + 2/x^2$	$1/\sqrt{x}$
$F(x)$									

№ 85.

Найдите следующие интегралы:

1) $\int \left(3 - x^5 + \frac{1}{x^5}\right)dx$.

Ответ: $3x - \frac{x^6}{6} - \frac{1}{4x^4} + C.$

2) $\int \left(x - \frac{4}{x^6} + 10x^9\right)dx$.

Ответ: $\frac{x^2}{2} + \frac{4}{5x^5} + x^{10} + C$.

3) $\int(4x^2 + 8x - 5)dx$.

Ответ: $\dfrac{4x^3}{3} + 4x^2 - 5x + C$.

4) $\int(4x - 1)^5\, dx$.

Ответ: $\dfrac{(4x-1)^6}{24} + C$.

5) $\int\dfrac{2dx}{(2-5x)^3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{5(2-5x)^2} + C$.

№ 86.

Найдите неопределенные интегралы:

Вариант 1.

1) $\int\left(5 - x^6 + \dfrac{2}{x^4}\right)dx$;

2) $\int\left(2x - \dfrac{3}{x^{10}} + 12x^7\right)dx$;

3) $\int(5x^3 + 6x - 4)dx$;

4) $\int(8x - 2)^3 dx$;

5) $\int\dfrac{6dx}{(7-9x)^3}$;

6) $\int \sin 5x dx$.

Вариант 2.

1) $\int\left(8 - x^8 + \dfrac{4}{x^5}\right)dx$;

2) $\int\left(6x - \dfrac{8}{x^3} + 7x^5\right)dx$;

3) $\int(3x^2 + 5x - 1{,}7)dx$;

4) $\int(10x - 11)^4 dx$;

5) $\int\dfrac{7dx}{(4-8x)^5}$;

6) $\int \cos 2x dx$.

Вариант 3.

1) $\int\left(13 - x \quad + \text{—}\right)dx$;

2) $\int\left(2x - \dfrac{6}{x^4} + 15x^9\right)dx$;

3) $\int(5x^3 + 3x - 1{,}5)dx$;

4) $\int(5x - 3)^6\, dx$;

Вариант 4.

1) $\int\left(13 - 2x^3 + \dfrac{4}{x^3}\right)dx$;

2) $\int\left(3x - \dfrac{4}{x^7} + 5x^4\right)dx$;

3) $\int(3x^2 + 6x - 1{,}8)dx$;

4) $\int(5x - 2)^5\, dx$;

5) $\int\dfrac{4dx}{(12-6x)^5}$;

6) $\int \sin 4x\, dx$.

5) $\int\dfrac{8dx}{(7-5x)^6}$;

6) $\int \cos 7x\, dx$.

Вариант 5.

1) $\int\left(8 - x^4 + \dfrac{1}{x^6}\right)dx$;

2) $\int\left(x - \dfrac{3}{x^7} + 12x^{11}\right)dx$;

3) $\int(5x^2 + 10x - 1)dx$;

4) $\int(8x - 2)^7\, dx$;

5) $\int\dfrac{4dx}{(1-3x)^5}$;

6) $\int \sin 2x\, dx$.

Вариант 6.

1) $\int\left(8 - x^4 + \dfrac{1}{x^2}\right)dx$;

2) $\int\left(3x - \dfrac{4}{x^5} + 11x^{10}\right)dx$;

3) $\int(6x^5 + 4x - 2{,}5)dx$;

4) $\int(3x - 2)^7\, dx$;

5) $\int\dfrac{5dx}{(3-7x)^4}$;

6) $\int \cos 6x\, dx$.

Вариант 7.

1) $\int\left(4 - x^7 + \dfrac{1}{x^7}\right)dx$;

2) $\int\left(9x - \dfrac{3}{x^4} + 2x^5\right)dx$;

3) $\int(6x^{11} + 4x - 1)dx$;

4) $\int(7x - 3)^3\, dx$;

5) $\int\dfrac{12dx}{(4-6x)^5}$;

6) $\int \sin 3x\, dx$.

Вариант 8.

2) $\int\left(6 - x^8 + \dfrac{1}{x^8}\right)dx$;

3) $\int\left(5x - \dfrac{14}{x^6} + 2x^3\right)dx$;

3) $\int(8x^2 + 3x - 15)dx$;

4) $\int(4x - 3)^7\, dx$;

5) $\int\dfrac{4dx}{(3-6x)^6}$;

6) $\int \cos 3x\, dx$.

Вариант 9.

1) $\int\left(10 - x^7 + \dfrac{1}{x^6}\right)dx$;

2) $\int\left(6x - \dfrac{3}{x^9} + 9x^8\right)dx$;

3) $\int(5x^2 + 3x - 2)dx$;

Вариант 10.

1) $\int\left(5 - 2x^5 + \dfrac{1}{x^9}\right)dx$;

2) $\int\left(3x - \dfrac{2}{x^8} + 20x^9\right)dx$;

3) $\int(4x^3 + 7x - 2)dx$;

4) $\int (4x+11)^7\,dx$;

5) $\int \frac{dx}{(3 \quad 2\ )}$;

6) $\int \sin 6x\,dx$.

4) $\int (2x+3)^4\,dx$;

5) $\int \frac{7dx}{(4-14x)^6}$;

6) $\int \cos 8x\,dx$.

Вопросы по теме

1. *Какое действие называется интегрированием?*
2. *Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$?*
3. *Перечислите основные свойства первообразной для функции.*
4. *Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции $f(x)$?*
5. *Чему равна первообразная нуля?*
6. *Дайте определение неопределенного интеграла.*
7. *Какая функция называется подынтегральной?*
8. *Перечислите свойства неопределенного интеграла.*
9. *Как проверить результат интегрирования?*
10. *Чему равна производная от неопределенного интеграла?*
11. *Чему равен $\int d(\ln x^8 - \sin 3x)$?*
12. *Перечислите методы интегрирования.*
13. *Перечислите основные табличные интегралы.*
14. *Каким образом выполняется метод замены переменной при интегрировании?*
15. *Можно ли проинтегрировать любую функцию?*

Тема 2.7. Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница. Свойства определенного интеграла

Термины

- Определенный интеграл
- Формула Ньютона – Лейбница
- Приращение первообразной
- Свойства определенного интеграла
- Геометрический смысл определенного интеграла

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определенный интеграл

Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на данном отрезке $[a; b]$, где $a < b$, и $F(x)$ — некоторая первообразная при $x \in [a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Обозначим длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1 \div k$) через

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Тогда величина $\delta = \underset{i=1,2\ldots k}{\max \Delta x_i}$ называется *мелкостью разбиения*.

Зафиксируем произвольным образом точки

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ и составим сумму

$$\sigma(f, \xi_1, \ldots, \xi_k) = \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i.$$

Суммы такого вида называются *интегральными суммами Римана*.

Функция f называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a; b]$, если существует такое число A, что для любой последовательности разбиений отрезка $[a; b]$, у которой $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ и для любого выбора точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1 \div n)$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i-1}^{k} f(\xi^{(n)}) \cdot \Delta x^{(n)} = A,$$

где $\Delta x_i^{(n)} = (x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$, $(i = 1 \div k,\ n = 1, 2, \ldots)$.

Если выполнены все условия определения, то число A назовем (Римановым) определенным интегралом функции f на отрезке $[a; b]$ и будем обозначать $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma\left(f, \xi_l^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}\right), \text{ где } \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

или подробно $\lim\limits_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum\limits_{i=o}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Если существует конечный предел интегральной суммы

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки и выбора промежуточных точек ξ_k, то этот предел называют определенным интегралом (или интегралом Римана) от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

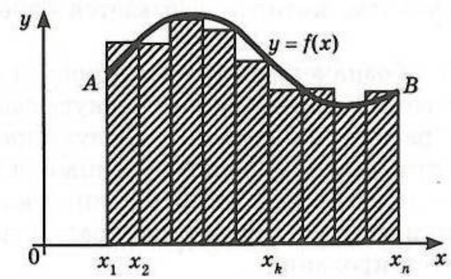
Если указанный предел существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$ (или интегрируемой по Риману). При этом $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, $f(x)$ — подынтегральной функцией, x — переменной интегрирования, a и b — соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, в случае, когда диаметр разбиения λ стремится к нулю.

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(x) \geqslant 0$. Фигура, ограниченная графиком AB функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью OX (рисунок далее), называется *криволинейной трапецией*.

Интегральная сумма и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл: произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ равно площади прямоугольника с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(\xi_k)$, а сумма $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры (изображенной на рисунке). Очевидно, что эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k.



Чем меньше Δx_k, $k = 1, \ldots, n$, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь S криволинейной трапеции принимается предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, ***с геометрической точки зрения определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.***

Формула Ньютона — Лейбница

Формула Ньютона — Лейбница дает правило вычисления определенного интеграла: *значение определенного интеграла на отрезке $[a;\ b]$ от непрерывной функции $f(x)$ равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при $x = b$ и $x = a$.*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Здесь a и b — соответственно нижний и верхний пределы интегрирования.

Можно записать, что интеграл равен приращению первообразной.

Понятие определенного интеграла можно вывести через площадь криволинейной трапеции. Площадь криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$) выражается интегральной суммой или числом, которое называется определенным интегралом.

Общность обозначения определенного и неопределенного интегралов подчеркивает тесную связь между ними, но это разные понятия по смыслу: определенный интеграл — это число, а неопределенный интеграл — совокупность первообразных функций. Связь между определенным и неопределенным интегралом выражается методами интегрирования.

Основные свойства определенного интеграла

Рассмотрим свойства определенного интеграла.

1. Если нижний и верхний пределы интегрирования равны ($a = b$), то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Это свойство следует из определения интеграла.

2. Если $f(x) = 1$, то

$$\int_a^b dx = b - a.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на $[a;\ b]$ функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

6. Если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и для любых чисел a, b, c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Оценка определенного интеграла: если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a;\ b]$, то

$$m(b - a) < \int_a^b f(x)dx < M(b - a).$$

Замена переменной в определенном интеграле

Этот метод, как и в случае неопределенного интеграла, позволяет упростить вычисления, т. е. привести подынтегральное выражение к соответствующей табличной форме. Применение замены переменной в определенном интеграле базируется на следующей теореме.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, а функция $x = \phi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1;\ t_2]$, причем $\phi([t_1;\ t_2]) = [a;\ b]$ и $\phi(t_1) = a$, $\phi(t_2) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Рассмотрим примеры.

Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$.

Решение:

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \left\{\begin{array}{l} t = \sqrt{e^x - 1},\ x = \ln\left(1 + t^2\right) \\ dx = \dfrac{2t}{1 + t^2}dt \\ 0 \leqslant x \leqslant \ln 2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{array}\right\} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{t^2}{1 + t^2}dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right)dt = 2[t - \operatorname{arctg} t]\Big|_0^1 = \frac{4 - \pi}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{4 - \pi}{2}$.

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на отрезке $[a;\ b]$ функции переменной x. Тогда $d(uv) = udv + vdu$. Проинтегрируем обе части последнего равенства на отрезке $[a;\ b]$:

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu.$$

С другой стороны, по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b d(uv) = (uv)\Big|_a^b.$$

Следовательно, формула принимает вид

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Формула называется ***формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.***

Например, вычислим интеграл $\int\limits_1^2 \ln x dx$.

Решение:

$$\int_1^2 \ln x\ dx = (x \cdot \ln x)\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

Ответ: $2\ln 2 - 1$.

Рассмотрим более сложные задачи с применением нахождения определенного интеграла.

1) При каком a выполняется равенство

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{1 - 2x}{3}dx = -\frac{4}{3}?$$

Решение.

$$\int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{1 - 2x}{3}dx = \int_{\frac{a}{2}}^{a}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x\right)dx = \left(\frac{1}{3}x - \frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_{\frac{a}{2}}^{a} =$$

$$= \frac{a}{3} - \frac{a^2}{3} - \left(\frac{a}{6} - \frac{a^2}{12}\right) = \frac{2a - 3a^2}{12}.$$

По условию задачи $\dfrac{2a - 3a^2}{12} = -\dfrac{4}{3}$, откуда $a_1 = -2$, $a_2 = 2\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $-2;\ 2\dfrac{2}{3}$.

2) Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \cos 3xdx$.

Решение.

$$\int_0^{\pi} \sin 2x \cos 3x dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{4}{5}.$$

Ответ: $-\dfrac{4}{5}$.

Задания для самостоятельной работы

№ 87.

Вычислите интегралы:

1) $\int_0^2 (x^2 + x - 2)dx$; *Ответ*: 2/3.

2) $\int_{-2}^0 (3 - 2x - x^2)dx$; *Ответ*: 22/3.

3) $\int_0^3 (3x^2 + x - 2)dx$; *Ответ*: 25,5.

4) $\int_1^3 (3 - x^2)dx$; *Ответ*: –8/3.

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos x dx$; *Ответ*: 9.

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dx}{\cos^2 x}$. *Ответ*: 2.

№ 88.

Вычислите определенные интегралы:

Вариант 1.

1) $\int_{-2}^{1} (x^3 - 3x)dx$;

2) $\int_1^4 (4 - x^2)dx$;

3) $\int_0^2 (3x^2 + x - 3)dx$;

4) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{8dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{(x+9)^2}$.

Вариант 2.

1) $\int_{-3}^{1} (x^2 - 8x)dx$;

2) $\int_{-1}^{2} (3 - x^4)dx$;

3) $\int_1^3 (2x^3 + x^2 - 5)dx$;

4) $\int_0^{\pi/4} 4\cos x dx$;

5) $\int_{-2}^{4} \frac{dx}{(x+3)^4}$.

Вариант 3.

1) $\int_{-2}^{1} (4x^3 - 2x)dx$;

2) $\int_1^5 (2 - x)dx$;

3) $\int_0^3 (6x^2 + x - 5)dx$;

4) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{5dx}{\cos^2 x}$;

5) $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(x+4)^2}$.

Вариант 4.

1) $\int_{-2}^{3} (x^2 - 7x)dx$;

2) $\int_1^4 (5 - x^3)dx$;

3) $\int_1^3 (3x^3 + x^2 - 6)dx$;

4) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{5dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{(x+10)^3}$.

7. Зак. 475

Вариант 5.

1) $\int\limits_{-3}^{3} (x^3 - 2x)dx;$

2) $\int\limits_{-1}^{2} (7 - x^3)dx;$

3) $\int\limits_{0}^{4} (x^2 + x - 1)dx;$

4) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3dx}{\cos^2 x};$

5) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{(x+2)^2}.$

Вариант 6.

1) $\int\limits_{-2}^{3} (5x^4 - 4x)dx;$

2) $\int\limits_{1}^{3} (3 - x)dx;$

3) $\int\limits_{0}^{2} (3x^3 + 2x - 9)dx;$

4) $\int\limits_{0}^{\pi/6} 4\cos x dx;$

5) $\int\limits_{-2}^{4} \frac{dx}{(x+4)^3}.$

Вариант 7.

1) $\int\limits_{-2}^{2} (x^2 - 6x)dx;$

2) $\int\limits_{2}^{5} (8 - x^2)dx;$

3) $\int\limits_{0}^{2} (4x^3 + x - 5)dx;$

4) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{3dx}{\cos^2 x};$

5) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}.$

Вариант 8.

1) $\int\limits_{-1}^{4} (x^2 - 5x)dx;$

2) $\int\limits_{1}^{3} (4x - x^3)dx;$

3) $\int\limits_{0}^{2} (3x^3 + 5x - 8)dx;$

4) $\int\limits_{0}^{\pi/4} 2\sin x dx;$

5) $\int\limits_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+8)^2}.$

Вариант 9.

1) $\int\limits_{0}^{1} (x^5 - 3x)dx;$

Вариант 10.

1) $\int\limits_{-2}^{1} (9x^2 - 2x)dx;$

2) $\int\limits_{-2}^{4} (4 - x)dx;$

3) $\int\limits_{1}^{2} (5x^2 + x - 6)dx;$

4) $\int\limits_{0}^{\pi/6} 4\sin x dx;$

5) $\int\limits_{-2}^{3} \frac{dx}{(x+1)^4}.$

2) $\int\limits_{1}^{3} (2 - x^3)dx;$

3) $\int\limits_{-1}^{1} (2x^3 + x - 2)dx;$

4) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{3dx}{\cos^2 x};$

5) $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{(x+11)^2}.$

Вариант 11.

1) $\int\limits_{0}^{1} (x^3 - 5x)dx;$

2) $\int\limits_{1}^{3} (4x - x^2)dx;$

3) $\int\limits_{0}^{2} (3x^2 + 2x - 1)dx;$

4) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{3dx}{\sin^2 x};$

5) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-2)^2}.$

Вариант 12.

1) $\int\limits_{-3}^{1} (x^2 - 6x)dx;$

2) $\int\limits_{-1}^{2} (3x - 5x^4)dx;$

3) $\int\limits_{1}^{3} (2x^3 + 3x^2 - 5x)dx;$

4) $\int\limits_{0}^{\pi/4} 8\cos x dx;$

5) $\int\limits_{-2}^{4} \frac{dx}{(x-3)^4}.$

Вариант 13.

1) $\int\limits_{-2}^{1} (8x^3 - 4x)dx;$

2) $\int\limits_{1}^{5} (2 - x^3)dx;$

Вариант 14.

1) $\int\limits_{-2}^{3} (3x^2 - 6x)dx;$

2) $\int\limits_{1}^{4} (5x - x^3)dx;$

3) $\int_{0}^{3}(3x^2+6x-5)dx;$

4) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{10dx}{\cos^2 x};$

5) $\int_{-1}^{3}\frac{dx}{(x-4)^2}.$

Вариант 15.

1) $\int_{-3}^{3}(x^3-4x)dx;$

2) $\int_{-1}^{2}(7x-6x^3)dx;$

3) $\int_{0}^{4}(x^2+2x-1)dx;$

4) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{15dx}{\cos^2 x};$

5) $\int_{1}^{3}\frac{dx}{(x-2)^2}.$

Вариант 17.

1) $\int_{-2}^{2}(3x^2-4x)dx;$

2) $\int_{2}^{5}(8x-6x^2)dx;$

3) $\int_{0}^{2}(4x^3+8x-15)dx;$

3) $\int_{1}^{3}(x^3+3x^2-6x)dx;$

4) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{10dx}{\sin^2 x};$

5) $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(x-10)^2}.$

Вариант 16.

1) $\int_{-2}^{3}(5x^4-4x)dx;$

2) $\int_{1}^{3}(3-x^2)dx;$

3) $\int_{0}^{2}(3x^2+4x-4)dx;$

4) $\int_{0}^{\pi/6}6\cos x dx;$

5) $\int_{-2}^{4}\frac{dx}{(x-4)^3}$

Вариант 18.

1) $\int_{-1}^{4}(x^2-10x)dx;$

2) $\int_{1}^{3}(4x-4x^3)dx;$

3) $\int_{0}^{2}(3x^3+5x-2)dx;$

4) $\int_{0}^{\pi/4}\frac{12dx}{\cos^2 x};$

5) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x-3)^2}.$

Вариант 19.

1) $\int_{0}^{1}(x^5-4x)dx;$

2) $\int_{-2}^{4}(4x-x^2)dx;$

3) $\int_{1}^{2}(5x^2+x-1)dx;$

4) $\int_{0}^{\pi/6}8\sin x dx;$

5) $\int_{-2}^{3}\frac{dx}{(x-1)^4}.$

4) $\int_{0}^{\pi/4}10\sin x dx;$

5) $\int_{-3}^{2}\frac{dx}{(x-8)^2}.$

Вариант 20.

1) $\int_{-2}^{1}(6x^2-2x)dx;$

2) $\int_{1}^{3}(12-x^3)dx;$

3) $\int_{-1}^{1}(4x^3+x-5)dx;$

4) $\int_{0}^{\pi/4}\frac{10dx}{\cos^2 x};$

5) $\int_{1}^{4}\frac{dx}{(x-11)^2}.$

Вопросы по теме

1. *Дайте определение определенного интеграла.*
2. *Сформулируйте теорему Ньютона – Лейбница.*
3. *Перечислите свойства определенного интеграла.*
4. *В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?*
5. *Что общего у неопределенного и определенного интегралов?*

Тема 2.8. Геометрические приложения определенного интеграла. Физические приложения определенного интеграла

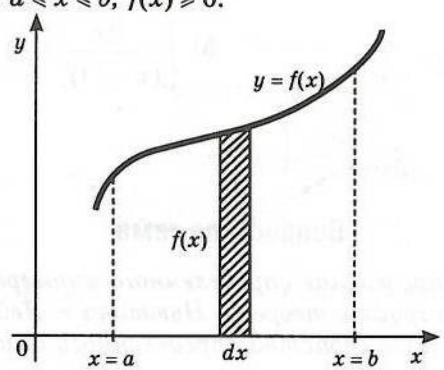
Термины

- Криволинейная трапеция
- Геометрический смысл интеграла
- Площадь криволинейной трапеции
- Физические приложения интеграла

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

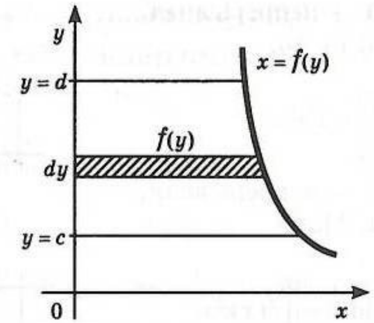
Вычисление площади плоской фигуры

Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) \geqslant 0$.



Так как дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, т.е. $dS = f(x)dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b, получим

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

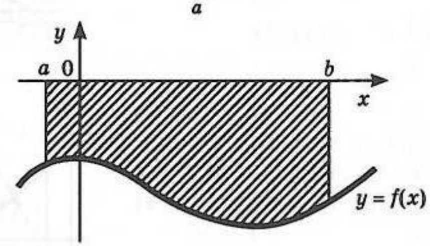


Если криволинейная трапеция прилегает к оси Oy так, что $c \leqslant y \leqslant d$, $x = \phi(y) \geqslant 0$, то дифференциал переменной площади S равен $dS = f(y)dy$, откуда

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy.$$

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, лежит под осью Ox, площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$



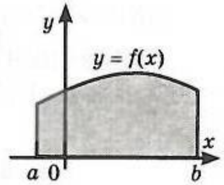
Если фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, расположена по обе стороны от оси Ox, то

$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b |f(x)|dx.$$

Ниже перечислены всевозможные случаи нахождения площадей фигур.

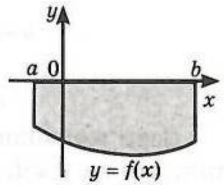
1) Если $y = f(x)$ — непрерывная, $f(x) \geqslant 0$ на $[a;\ b]$, то

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



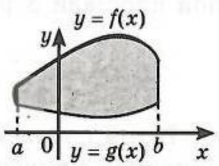
2) Если $y = f(x)$ — непрерывная, $f(x) \leqslant 0$ на $[a;\ b]$, то

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$



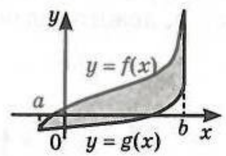
3) Если $y = f(x)$, $y = g(x)$ — непрерывные на $[a;\ b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ на $[a;\ b]$, то

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



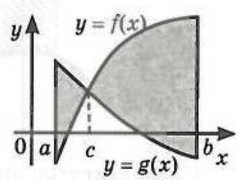
4) Если $y = f(x)$, $y = g(x)$ — непрерывные на $[a;\ b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ на $[a;\ b]$, то

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



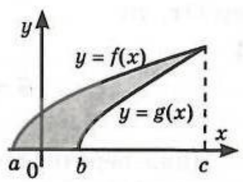
5) Если $y = f(x)$, $y = g(x)$ — непрерывные на $[a;\ b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ на $[c;\ b]$, где $c \in [a;\ b]$, $f(x)g(x) \leqslant g(x)$ на $[a;\ c]$, то

$$S = \int_a^c (g(x) - f(x))dx + \int_c^b (f(x) - g(x))dx.$$



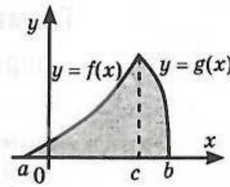
6) Если $y = f(x)$ — непрерывная на $[a;\ c]$, $y = g(x)$ — непрерывная на $[b;\ c]$, $f(x) \geqslant g(x)$ на $[a;\ c]$, где $c \notin [a;\ b]$, то

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c g(x)dx.$$



7) Если $y = f(x)$ — непрерывная на $[a;\ c]$, $y = g(x)$ — непрерывная на $[c;\ b]$, где $c \in [a;\ b]$, то

$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx.$$



Физические приложения определенного интеграла

Величины	Соотношение в дифференциалах	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A — работа F — сила N — мощность	$dA = F(x)dx$	$F(x) = \dfrac{dA}{dx}$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$
	$dA = N(t)dt$	$N(t) = \dfrac{dA}{dt}$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$
m — масса тонкого стержня ρ — линейная плотность	$dm = \rho(x)dx$	$\rho(x) = \dfrac{dm}{dx}$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$
q — электрический заряд I — сила тока	$dq = I(t)dt$	$I(t) = \dfrac{dq}{dt}$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
s — перемещение v — скорость	$ds = v(t)dt$	$v(t) = \dfrac{ds}{dt}$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
Q — количество теплоты t — теплоемкость	$dQ = c(t)dt$	$c(t) = \dfrac{dQ}{dt}$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$

Геометрические приложения определенного интеграла

Определение и вычисление длины кривой, дифференциал кривой

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ — гладкая (т. е. производная $y' = f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

При параметрическом задании кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ [$x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции] длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^2 + y^2}\,dt.$$

Если гладкая кривая задана в полярных системах координат уравнением $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, то длина дуги

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta.$$

Дифференциал длины дуги

Длина дуги кривой определяется формулой

$$L = \int \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx,$$

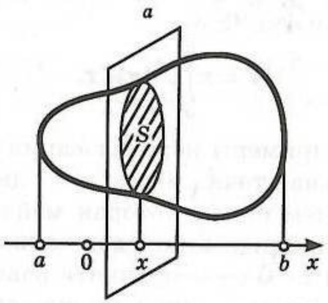
где $y = f(x)$ $\forall\, x \in [a;\ b]$. Предположим, что в этой формуле нижний предел интегрирования остается постоянным, а верхний изменяется. Обозначим верхний предел буквой x, а переменную интегрирования буквой t. Длина дуги будет функцией верхнего предела:

$$L(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Вычисление объемов тел

Пусть задано тело объемом V, причем имеется такая прямая, что, какую бы плоскость, перпендикулярную этой прямой, мы ни взяли, нам известна площадь S сечения тела этой плоскостью. Но плоскость, перпендикулярная оси Ox, пересекает ее в некоторой точке x. Следовательно, каждому числу x (из отрезка $[a;\ b]$) поставлено в соответствие единственное число $S\,(x)$ — площадь сечения тела этой плоскостью. Тем самым на отрезке $[a;\ b]$ задана функция $S(x)$. Если функция S непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то справедлива формула

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$



Полное доказательство этой формулы дается в курсах математического анализа, а здесь остановимся на наглядных соображениях, приводящих к ней.

Разобьем отрезок $[a;\ b]$ на n отрезков равной длины точками

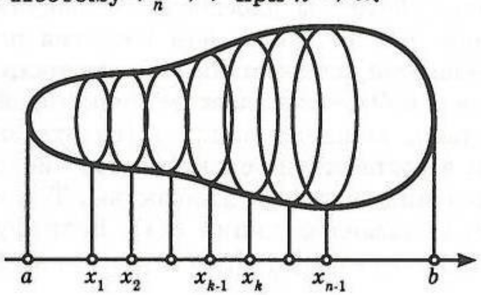
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n, \text{ и пусть}$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = x_k - x_{k-1},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Через каждую точку x_k проведем плоскость, перпендикулярную оси Ox. Эти плоскости разрезают заданное тело на слои. Объем слоя, заключенного между плоскостями a_{k-1} и a_k, при достаточно больших n приближенно равен площади $S(x_{k-1})$ сечения, умноженной на «толщину слоя» Δx, и поэтому

$$V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \ldots + S(x_{n-1})\Delta x = V_n.$$

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем тоньше слои, на которые разрезано тело, т. е. чем больше n. Поэтому $V_n \to V$ при $n \to \infty$.



Объем фигуры, полученной вращением вокруг оси Ox, находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx.$$

Рассмотрим примеры использования интеграла.

1) Материальная точка массы $m = 1$ движется по прямой под действием силы, которая меняется по закону $F(t) = 8 - 12t$. Найдите закон движения точки, если в момент времени $t = 0$ ее координата равна 0 и скорость равна 1. В какой момент времени скорость точки будет максимальной?

Решение:

1. $F = ma$, $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{8 - 12t}{1} = 8 - 12t.$
2. $v(t) = 8t - 6t^2 + c_1$, по условию $v(0) = 1$, значит, $c_1 = 1$, тогда $v(t) = 8t - 6t^2 + 1$.
3. $x(t) = 4t^2 - 2t^3 + t + c_2$, так как $x(0) = 0$, то $c_2 = 0$. Значит, $x(t) = 4t^2 - 2t^3 + t$.
4. Найдем момент времени, когда скорость точки будет максимальной:

$$v^1(t) = a(t) = 8 - 12t,\ \ 8 - 12t = 0,\ \ t = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $x(t) = 4t^2 - 2t^3 + t$, $t = \dfrac{2}{3}$ с.

2) Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, вычислите $\int_1^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}dx$.

Решение:

$$y = \sqrt{4x - x^2 - 3} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 4x - x^2 - 3 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}.$$

Найдем площадь полукруга с центром A (2; 0) и радиусом $R = 1$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

3) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x + 8$ и $y = 3x^2 - x^3$, если $x \in [-2; 3]$.

Решение:

Если не рисовать графиков данных функций, то надо узнать, имеют ли эти графики общие точки на $(-2; 3)$. Для этого надо решить уравнение
$3x^2 - x^3 = x^2 - 4x + 8$.
Итак, $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. $2 \in [-2; 3]$.

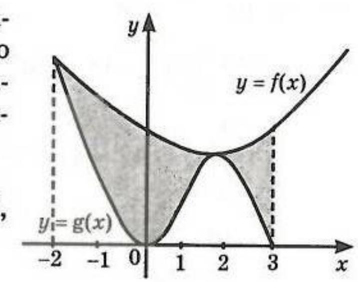
Не зная, график какой из функций находится выше другого на $[-2; 2)$ и $(2; 3]$, площадь фигуры находится так:

$$S = \left|\int_{-2}^{2}\left[(x^2 - 4x + 8) - (3x^2 - x^3)\right]dx\right| +$$

$$+\left|\int_{2}^{3}\left[(x^2 - 4x + 8) - (3x^2 - x^3)\right]dx\right|.$$

Если же нарисовать графики данных функций (что очень не сложно), то замечаем, что всюду на $[-2; 3]$ выполняется неравенство

$x^2 - 4x + 8 \geqslant 3x^2 - x^3$.



На рисунке $f(x) = 3x^2 - x^3$, $g(x) = x^2 - 4x + 8$.

Поэтому

$$S = \int_{-2}^{3}\left[(x^2 - 4x + 8) - (3x^2 - x^3)\right]dx.$$

Сравнивая формулы, полученные для вычисления площади S, видим, что в данном примере значительно легче искать площадь после того, как нарисованы графики функций. А можно ли все-таки решить задачу не делая рисунка.

$$S = \int_{-2}^{3}\left(x^3 - 2x^2 - 4x + 8\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x\right)\Bigg|_{-2}^{3} = 22\frac{11}{12}.$$

Ответ: $22\frac{11}{12}$.

4) Найдите площадь фигуры, ограниченную линиями:

$y = x^2 - 4x + \sin^2\frac{x}{2}$ и $y = -3 - \cos^2\frac{x}{2}$, если $x \in [2; 3]$.

Решение:

Так как графики данных функций построить трудно, то можно выяснить соотношение между функциями, не используя графиков. Исследуем разность данных функций

$$x^2 - 4x + \sin^2\frac{x}{2} - \left(-3 - \cos^2\frac{x}{2}\right) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, $x^2 - 4x + \sin^2\frac{x}{2} > -3 - \cos^2\frac{x}{2}$ на $[2; 3]$,

а значит, график первой функции лежит выше графика второй функции и

$$S = \int_{2}^{3}\left[x^2 - 4x + \sin^2\frac{x}{2} - \left(-3 - \cos^2\frac{x}{2}\right)\right]dx =$$

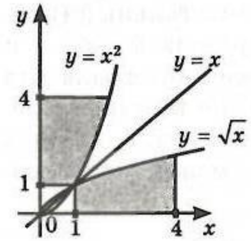
$$= \int_{2}^{3}\left(x^2 - 4x + 4\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_{2}^{3} =$$

$$= (9 - 18 + 12) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

5) Вычислите площадь фигуры, ограниченной данными линиями: $y = x^2$ при $x \geqslant 0$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$.

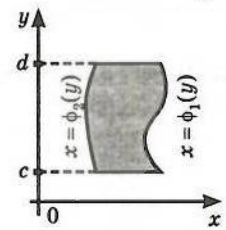
Решение:



Данная фигура симметрична криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, графиком функции $y = \sqrt{x}$, обратной $y = x^2$, $x \geqslant 0$. Поэтому эти фигуры имеют равные площади и

$$S = \int_{1}^{4}\sqrt{x}dx,\ S = \frac{14}{3}.$$

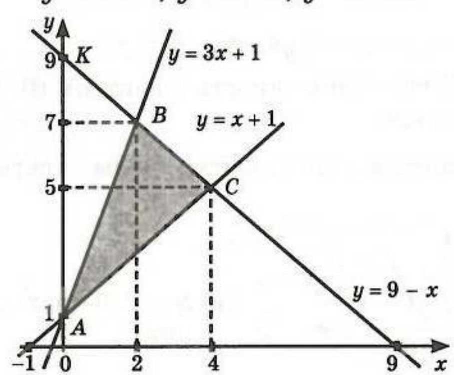
Ответ: $4\frac{2}{3}$.



Если фигура ограничена линиями $x = \phi_1(y)$, $x = \phi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, где $c < d$ и $\phi_2(y) \geqslant \phi_1(y)$ на $[c; d]$, то ее площадь может быть вычислена по формуле

$$S = \int_{c}^{d}(\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy.$$

6) Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 3x + 1$, $y = 9 - x$, $y = x + 1$.



Решение:

Вершины полученного $\triangle ABC$ имеют координаты: $A\ (0;\ 1)$, $B\ (2;\ 7)$, $C\ (4;\ 5)$.

Можно заметить, что $\triangle ABC$ — прямоугольный (произведение угловых коэффициентов прямых $y = x + 1$ и $y = 9 - x$ равно -1). Поэтому применение интеграла для вычисления $S(\triangle ABC)$ нерационально. Ее всегда можно найти как разность площадей треугольников, у которых известны высота и основание, или же можно использовать координатный метод.

$$AC = \sqrt{(4-0)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32};$$

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{8};$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{8} = 8.$$

Ответ: 8.

7) Используя геометрический смысл интеграла, вычислите интеграл $\int\limits_{-8}^{8} \left(64 - x^2\right) dx$.

Решение:

Примем за $y = \sqrt{64 - x^2}$, $D(y) = [8;\ -8]$, так как

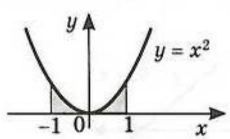
$$64 - x^2 \geqslant 0,$$

$$|\,x\,| \leqslant 8,$$

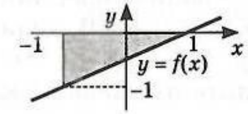
$$y^2 = 64 - x^2,$$

$y^2 + x^2 = 64$ — окружность с центром $(0;\ 0)$ и $R = 8$.
Ответ: 32π.

8) Найдите площади фигур (даны ответы с комментариями).

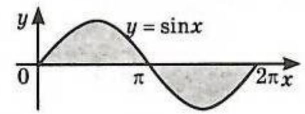


а) $S = 2/3$ (четность функции)

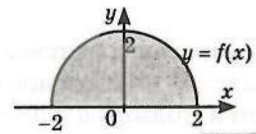


$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

б) $S = 1$ (площадь прямоугольного треугольника)

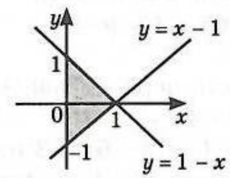


в) $S = 4$ (равенство фигур)

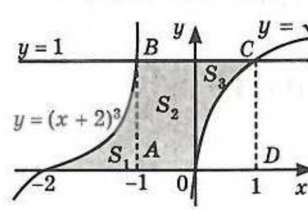


$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

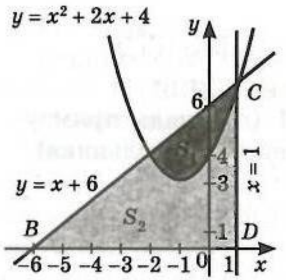
г) $S = 2\pi$ (площадь полукруга)



д) $S = 1$ (площадь треугольника)



е) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = (x + 2)^3$, $y = 0$, $y = 1$.
$S = 19/21$.
Комментарии:
1-й способ: $S = S_1 + S_2 + S_3$.
2-й способ: $S = S_1 + S_{ABCD} - S_{OCD}$.



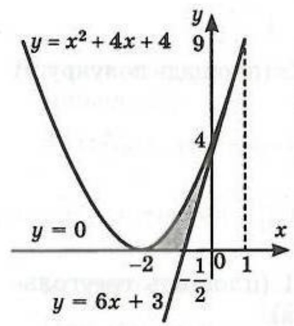
ж) Фигура, ограниченная линиями $y = x + 6$, $x = 1$, $y = 0$, делится параболой $y = x^2 + 2x + 4$ на две части. Найдите площадь каждой части.

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 = 24{,}5.$$

$$S_2 = S_{\Delta BCD} - S_1.$$

$$S_1 = \int_{-2}^{1} ((x + 6) - (x^2 + 2x + 4))dx = 4{,}5.$$

Ответ: $S_1 = 4{,}5$; $S_2 = 20$.



з) Найдите ту первообразную $F(x)$ функции $f(x) = 2x + 4$, график которой касается прямой $y = 6x + 3$. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком найденной первообразной и прямыми

$$y = 6x + 3 \text{ и } y = 0.$$

Решение:

Общий вид первообразных $F(x) = x^2 + 4x + \mathrm{C}$.

Графики функций $y = x^2 + 4x + \mathrm{C}$ и $y = 6x + 3$ имеют общую точку, если уравнение $x^2 + 4x + \mathrm{C} = 6x + 3$ имеет единственный корень. Так как уравнение квадратное, то это возможно, если $D = 0$.

$x^2 - 2x - 3 + \mathrm{C} = 0$.

$D = 4 - 4(\mathrm{C} - 3) = 0$, отсюда $\mathrm{C} = 4$.

$$S = \int_{-2}^{1} (x + 2)^2 dx - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 9 =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{1} - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}.$$

Ответ: $S = \frac{9}{4}$.

Интеграция дифференциального и интегрального исчислений

Развитие дифференциального и интегрального исчислений положило начало новой теории — дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение в математике — это уравнение, связывающее значение некоторой неизвестной функции в некоторой точке и значение ее производных различных порядков в той же точке. Дифференциальное уравнение содержит в своей записи неизвестную функцию, ее производные и независимые переменные. А решаются дифференциальные уравнения с использованием правил дифференцирования и интегрирования.

Теория дифференциальных уравнений — раздел математики, в котором изучаются дифференциальные уравнения и связанные с ними задачи. Ее результаты применяются во многих естественных науках, особенно широко — в физике.

Дифференциальные уравнения описывают самые разные процессы природы. Например:

1) Поглощение света в растворе. Доля поглощаемой энергии света на единицу толщины L слоя раствора постоянна и определяется концентрацией раствора C и молярным коэффициентом E поглощения растворенного вещества. $I\ (L)$ – интенсивность света на толщине L. Тогда $dI(L) = -\ I(L)\ E\ C\ dL$, следовательно, $I(L) = I_0\ e^{-ECL}$ — закон Бугера–Ламберта–Бера для раствора.
2) Доля убыли концентрации лекарственного вещества после введения в организм (фармакологическая кинетика).
3) Описание волновых процессов и колебаний и т.д.

В медицинских приложениях дифференциальные уравнения, например, используются для:

1) определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца (эхокардиография), определения вязкости крови и других параметров гемодинамики;
2) описания медико-биологических приложений ультразвука: эхоэнцефалограмма, УЗИ, ультразвуковая

физиотерапия, ультразвуковая локация и кардиография;

3) описания процессов физиологической акустики, которая изучает устройство и работу звуковоспринимающих и звуковоспроизводящих органов человека и животных и т. д.

Кроме этого, многие математические и физические задачи решаются с помощью дифференциальных уравнений.

Задания для самостоятельной работы

№ 89.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (схематично изобразив графики функций):

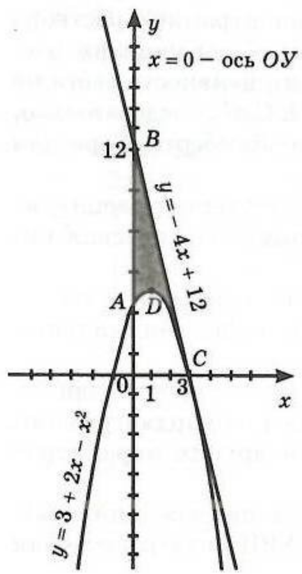
а) $y = 6 + x - x^2$ и $y = 6 - 2x$;

б) $y = 2x^2$ и $y = x + 1$;

в) $y = 1 - x$ и $y = 3 - 2x - x^2$;

г) $y = x^2$ и $y = \sqrt{X}$.

Ответ: а) 4,5; б) 9/8; в) 4,5; г) 1/3.



№ 90.

Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3 + 2x - x^2$, касательной к графику в его точке с абсциссой 3 и прямой $x = 0$.

Решение:

Графиком функции

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

является парабола.

$$-x^2 + 2x + 3 = 0,$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Найдем корни по теореме Виета:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{array}\right\} => x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

$$x = (-1 + 3) : 2 = 1;\ y = y\ (1) = -1 + 2 + 3 = 4.$$

(0; 3) — точка A пересечения параболы с Oy;

(1; 4) — координаты вершин параболы D.

$x = 0$ — ось Oy.

Для касательной общий вид уравнения

$$y = y(x_0) + y'(x_0)\ (x - x_0).$$

По условию $x_0 = 3$ — точка касания.

Составим уравнение касательной $y = -4x + 12$ и отметим точки (0; 12) (3; 0).

Строим графики.

$$S_ф = S\triangle OBC - S_{кр.тр.} OADC,\ S\triangle OBC =$$

$$= \frac{1}{2} OC \cdot OB,\ S\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 18;$$

$$S_{кр.тр.}\ OADC = \int_0^3 \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\Bigg|_0^3 = -9 + 9 + 9 = 9.$$

$$S_ф = 18 - 9 = 9.\ S_ф = 9.$$

Ответ: 9.

№ 91.

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$;

2) $y = \sqrt{X}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

3) $y = 2x$, $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$;

4) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$;

5) $y^2 - 4x = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $y = 0$;

6) $y^2 - x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $y = 0$;

7) $y = -x^2 + 2x$, $y = 0$;

8) $y^2 = 2x$, $x - 2 = 0$, $y = 0$;

9) $y = \sqrt{x - 1}$, $x = 3$, $y = 0$;

10) $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

Ответ: 1) $\frac{28\pi}{15}$; 2) 7,5π; 3) 11π; 4) $16\frac{2}{3\pi}$; 5) 24π; 6) $\frac{\pi}{2}$; 7) $\frac{16\pi}{15}$; 8) 4π; 9) 2π; 10) $\frac{16\pi}{15}$.

№ 92.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

Вариант 1. $y = x^2 - 2x + 1$ и $y = 1 + x$.

Вариант 2. $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = 4 - x^2$.

Вариант 3. $y = x^2 + 1$ и $y = -x^2 + 4x + 1$.

Вариант 4. $y = 4x - x^2$ и $y = 4 - x$.

Вариант 5. $y = -x^2 - 5x + 3$ и $y = 3$.

Вариант 6. $y = x^2$ и $y = 2x - x^2$.

Вариант 7. $y = x^2 - 3x + 4$ и $y = 4$.

Вариант 8. $y = 0{,}5x^2 + 1$, $y = -x + 0{,}5$ и $x = -4$.

Вариант 9. $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = 2 + 4x - x^2$.

Вариант 10. $y = 3x - x^2$ и $y = 0$.

Вариант 11. $y = -x^2 + 5x + 1$ и $y = 1$.

Вариант 12. $y = x^2 + 2$ и $y = x + 4$.

Вариант 13. $y = -x^2 + 2x + 8$ и $y = 5$.

Вариант 14. $y = -x^2 - 2x$ и $y = 0$.

Вариант 15. $y = x^2 - x - 5$ и $y = x - 2$.

Вариант 16. $y = 9 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$.

Вариант 17. $y = x^2 + x - 4$ и $y = 6 - x^2$.

Вариант 18. $y = 2x^2 + 1$, $y = 3$ и $x = 0$.

Вариант 19. $y = -x^2 + 4$ и $y = 2 - x$.

Вариант 20. $y = x - x^2$ и $y = x^2 - x$.

Вариант 21. $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Вариант 22. $y = x^2 + 2$ и $y = 6$.

Вариант 23. $y = -x^2 + 5$ и $y = 1$.

Вариант 24. $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.

Вариант 25. $y = -x^2 + 6$ и $y = 0$.

Вариант 26. $y = x^2 - 4$, $x = 3$ и $y = 0$.

Вариант 27. $y = 2x - 1$ и $y = \sqrt{x}$.

Вариант 28. $y = 0{,}5x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 3$.

Вариант 29. $y = -x^2 + 7$ и $y = 0$.

Вариант 30. $y = -x^2 + 3x + 4$ и $y = 0$.

Вариант 31. $y = -x^2 + x + 2$ и $x = 0$.

Вариант 32. $y = x^2 + 2x + 1$ и $y = 1 - x$.

Вариант 33. $y = x^3$, $x = 2$ и $y = 0$.

Вариант 34. $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$ и $y = 0$.

Вариант 35. $y = x^2 + x + 2$, $x = -3$, $x = 0$ и $y = 0$.

Вариант 36. $y = x^2 + 2x + 4$, $y = 4$.

Вариант 37. $y = -x^2 + x + 4$ и $y = 0$.

Вариант 38. $y = x^2 + 2x$, $x = 2$ и $y = 0$.

Вариант 39. $y = -x^2 + 9$ и $y = x + 3$.

Вариант 40. $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$ и $y = 0$.

№ 93.

Выполните тестовые задания.

1. Значение предела $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ равно:
   1) 1; 2) 0; 3) 8; 4) 16.

2. Производная функции $y = x^5 \cdot e^x$ имеет вид:
   1) $y' = 5x^4 \cdot e^x - x^5 \cdot e^x$;
   2) $y' = 5x^4 \cdot e^x + x^5 \cdot e^x$;
   3) $y' = 5x^4 \cdot e^x$;
   4) $y' = 5x + e^x$.

3. Дифференциал функции $y = 8x^2 - 1$ имеет вид:
   1) $8xdx$; 2) dx; 3) $16xdx$; 4) $(2x - 1)dx$.

4. Множество всех первообразных для функции $y = x$ имеет вид:
   1) 6; 2) $6x^2$; 3) $x^2 + C$; 4) $3x^2 + C$.

5. Используя свойства определенного интеграла, интеграл $\int\limits_0^{\pi} (6\cos x + x^2)dx$ можно привести к виду:

1) $6\int_0^{\pi}\cos x\,dx \quad \int_0^{\pi} x\;dx$; 2) $6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2dx$;

3) $4\int_{\pi}^{0}(6\cos x + x^2)dx$; 4) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(6\cos x + x^2)dx$.

6. Приращением аргумента называется:
   1) Разность между значением функции и значением аргумента.
   2) Дифференциал аргумента.
   3) Разность между двумя значениями функции.
   4) Разность между двумя значениями аргумента.

7. Значение предела $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$ равно:

   1) 10; 2) 25; 3) 5; 4) 0.

8. Производная функции $y = x^3 \cdot e^x$ имеет вид:
   1) $y' = 3x^2 \cdot e^x - x^3 \cdot e^x$;
   2) $y' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$;
   3) $y' = 3x^2 \cdot e^x$;
   4) $y' = 3x + e^x$.

9. Дифференциал функции $y = x^3 + 1$ имеет вид:
   1) $3xdx$; 2) dx; 3) $3x^2dx$; 4) $(3x^2 + 1)dx$.

10. Множество всех первообразных для функции $y = 4x$ имеет вид:
    1) 4; 2) x^4; 3) x^2 + C; 4) $2x^2$ + C.

11. Используя свойства определенного интеграла, интеграл $\int_0^{\pi}(5\sin x + x^3)dx$ можно привести к виду:

    1) $5\int_0^{\pi}\sin x\,dx + \int_0^{\pi} x^3dx$; 2) $5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^3dx$;

3) $\int_{\pi}^{0}(5\sin x + x^3)dx$; 4) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5\sin x + x^3)dx$.

12. Приращением функции называется:
    1) Разность между значением функции и значением аргумента.
    2) Дифференциал аргумента.
    3) Разность между двумя значениями функции.
    4) Разность между двумя значениями аргумента.

13. Значение предела $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{(5+x)(3+x)}{25-x^2}$ равно:

    1) −0,2; 2) ∞; 3) 0,2; 4) 0.

14. Производная функции $y = x^4 \cdot e^x$ имеет вид:
    1) $y' = 4x^3 \cdot e^x - x^4 \cdot e^x$;
    2) $y' = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x$;
    3) $y' = 4x^3 \cdot e^x$;
    4) $y' = 4x^3 + e^x$.

15. Дифференциал функции $y = x^5 + 1$ имеет вид:
    1) $5xdx$; 2) dx; 3) $5x^4dx$; 4) $(5x^4 + 1)dx$.

16. Множество всех первообразных для функции $y = 6x$ имеет вид:
    1) 6; 2) x^6; 3) x^2 + C; 4) $3x^2$ + C.

17. Используя свойства определенного интеграла, интеграл $\int_0^{\pi}(7\sin x + x^5)dx$ можно привести к виду:

    1) $7\int_0^{\pi}\sin x\,dx + \int_0^{\pi} x^5dx$; 2) $7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^5dx$;

    3) $\int_{\pi}^{0}(7\sin x + x^5)dx$; 4) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(7\sin x + x^5)dx$.

18. Дифференциал функции равен:
   1) Произведению производной этой функции на дифференциал аргумента.
   2) Дифференциалу аргумента.
   3) Произведению предела этой функции на дифференциал аргумента.
   4) Произведению этой функции на приращение аргумента.

19. Определенный интеграл — это:
   1) Число.
   2) Совокупность первообразных функций.
   3) Первообразная функция.
   4) Формула.

20. Неопределенный интеграл — это:
   1) Число.
   2) Совокупность первообразных функций.
   3) Первообразная функция.
   4) Формула.

Вопросы по теме

1. Что такое криволинейная трапеция?

2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

3. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла (составьте словесный алгоритм)?

4. Перечислите области применения интеграла, назовите величины, которые можно вычислить с помощью интеграла.

5. Как двумя способами можно вычислить площадь прямолинейной фигуры (фигуры, ограниченной отрезками в координатной плоскости)?

Исторические сведения к разделу 2

Теория пределов

Предел — одно из важнейших понятий математики. Число А называется пределом величины x, если в процессе своего изменения x неограниченно приближается к А.

Обозначение *lim* — сокращение латинского слова *limes* (межа, граница); например, если мы говорим «значение стремится к чему-либо», то мы приближаем его к границе. Термин «предел» ввел И. Ньютон. Рассказ о происхождении терминологии, принятой в дифференциальном исчислении, был бы не полон без понятия бесконечно малой. Бесконечно малые играют важную роль в математическом анализе, который поэтому часто называют также анализом бесконечно малых.

В развитии теории пределов принимали участие И. Ньютон, Г. Лейбниц, Ж. Даламбер (1717–1783), Л. Эйлер. Современная теория предела основана на строгом определении предела, данном О. Коши (1789–1857), и была существенно продвинута работами математиков К. Вейерштрасса (1815–1897) и Б. Больцано (1781–1848).

Теория пределов является базовой для основных теорий высшей математики: дифференцирования, интегрирования и дифференциальных уравнений.

Огюстен Луи Коши внес огромный вклад в развитие математического анализа, его научные работы охватывают различные разделы математики и физики. Он написал свыше 800 работ, полное собрание сочинений содержит 27 томов.

Теория дифференцирования

Математический анализ (или просто анализ) — ветвь математики, оформившаяся в XVIII столетии и включающая в себя две основные части: дифференциальное и интегральное исчисление. Анализ возник благодаря усилиям многих математиков (в первую очередь Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница) и сыграл громадную роль в развитии естествознания — появился мощный, достаточно универсальный метод исследования функций, возникающих при решении разнообразных прикладных задач. Важнейшая цель курса математического анализа — знакомство с начальными понятиями и методами анализа (производная, дифференцирование, первообразная, интеграл, метод поиска максимумов и минимумов функций). Математический анализ относится к высшей математике. Любой раздел математики учит нас логически мыслить, рассуждать. Совсем не обязательно помнить все формулы, нужно овладевать методами решения, потому что в математике все взаимосвязано и одно вытекает из другого. Не зря говорят, что математика – это гимнастика ума, она тренирует способность мышления.

В математике XVII в. самым большим достижением справедливо считается изобретение дифференциального и интегрального исчисления. Сформировалось оно в ряде сочинений Ньютона и Лейбница и их ближайших сотрудников и учеников. Введение в математику методов анализа бесконечно малых стало началом больших преобразований, быстро изменивших все лицо математики и поднявших ее роль в системе естественнонаучных знаний человечества.

Однако появление анализа бесконечно малых не было делом рук одного или нескольких ученых, их гениальной догадки. Оно в действительности было завершением длительного процесса, внутриматематическая сущность которого состояла в накоплении и выделении элементов дифференциального и интегрального исчисления и теории рядов.

Для создания исчисления бесконечно малых внутри математики XVII в. сложились достаточные предпосылки. Это были наличие сложившейся алгебры и вычислительной техники; введение в математику переменной величины и координатного метода; усвоение инфинитезимальных идей древних, особенно Архимеда; накопление методов решения задач на вычисление квадратур, кубатур, определение центров тяжести, нахождение касательных, экстремалей и т.д.

Великий английский ученый, математик и физик И. Ньютон, исследуя зависимости координат движу-

щейся точки от времени, фактически уже занимался исследованием функций. Хотя не он ввел это понятие, Ньютон ясно осознавал его значение. Так, в 1676 г. он отмечал: «Я не мог бы, конечно, получить этих общих результатов, прежде чем не отвлекся от рассмотрения фигур и не свел все просто к исследованию ординат» (т. е. фактически функций от времени).

Раздел математики, в котором изучаются производные и их применения к исследованию функций, называется *дифференциальным исчислением*. Приращения, представляющие собой разности, играют заметную роль при работе с производными. Естественно поэтому появление латинского корня *differentia* (разность) в названии *calculis differential* нового исчисления, которое переводится как *исчисление разностей*; это название появилось уже в конце XVII в., т. е. при рождении нового метода.

Термин «производная» является буквальным переводом на русский французского слова *«derivee»*, которое в 1797 г. ввел Ж. Лагранж (1736–1813); он же ввел современные обозначения y', f'. Такое название отражает смысл понятия: функция $f'(x)$ происходит из $f(x)$, является производным от $f(x)$. И. Ньютон называл производную функцию *флюксией*, а саму функцию — *флюентой*. Г. Лейбниц говорил о *дифференциальном отношении* и обозначал производную как df/dx. Это обозначение также часто встречается в современной литературе.

Символ df Лейбниц выбрал для обозначения *дифференциала* функции. Заметим, что слово «экстремум» происходит от латинского *extremum* (крайний). *Maximum* переводится как наибольший, *a minimum* — наименьший.

Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем сравнительно недавно, в конце XVII столетия. Тем более поразительно, что задолго до этого Архимед не только решил задачу на построение касательной к такой сложной кривой как спираль (применяя при этом предельные переходы), но и сумел найти максимум функции $f(x) = x^2(a - x)$.

Эпизодически понятие касательной (которое связано с понятием производной) встречалось в работах итальянского математика Н. Тартальи (ок. 1500–1557) — здесь касательная появилась в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда. И. Кеплер рассматривал касательную в ходе решения задачи о наибольшем объеме параллелепипеда, вписанного в шар данного радиуса.

В XVII в. на основе учения Г. Галилея о движении активно развилась кинематическая концепция производной. Различные варианты изложения, примененные к разным задачам, встречаются уже у Р. Декарта, французского математика Роберваля (1602–1675), английского ученого Д. Грегори (1638–1675), в работах И. Барроу (1630–1677) и, наконец, И. Ньютона.

К рассмотрению касательной и нормали (прямая, перпендикулярная касательной и проведенная в точке касания) Декарт пришел в ходе изучения оптических свойств линз. С помощью методов аналитической геометрии и изобретенного им *метода неопределенных коэффициентов* он сумел решить задачи о построении нормалей к ряду кривых, в том числе эллипсу.

В 1629 г. П. Ферма предложил правила нахождения экстремумов многочленов. Существенно подчеркнуть, что фактически при выводе этих правил Ферма активно применял предельные переходы, располагая простейшим дифференциальным условием максимума и минимума.

Ферма сыграл выдающуюся роль в развитии математики. Его имя заслуженно носит не только известная теорема из анализа. Великая теорема Ферма («Уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном n, большем двух»), не доказанная, правда, и поныне, лишь один из итогов его размышлений над проблемами теории чисел. Ферма — один из создателей аналитической геометрии. Он занимался и оптикой. Широко известен принцип Ферма («Луч света распространяется так, что время его прохождения будет наименьшим»), применяемый и в современной физике. Важные следствия этого принципа вы можете вывести самостоятельно. Закон отражения света («Угол отражения равен углу падения») сводится согласно принципу Ферма к решению известной геометрической задачи. Для вывода *закона преломления света* вам потребуется применить известные правила нахождения экстремума.

Систематическое учение о производных развито Лейбницем и Ньютоном, который сформулировал и две основные проблемы анализа:

«1. Длина проходимого пути постоянно (т. е. в любой момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время.

2. Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути».

Первая проблема задает программу развития дифференциального исчисления. Вторая относится к интегральному исчислению.

Если Ньютон исходил в основном из задач механики (ньютонов анализ создавался одновременно с ньютоновой классической механикой), то Лейбниц по преимуществу исходил из геометрических задач.

Говоря о последующем развитии идей анализа (а они очень быстро завоевали популярность и нашли многих последователей), следует в первую очередь назвать имена учеников Лейбница — братьев Якоба и Иоганна Бернулли.

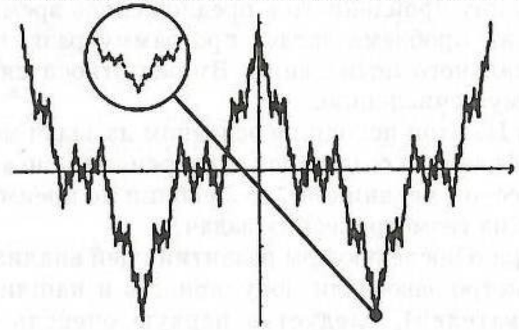
А. Лопиталь (1661–1704), который учился у И. Бернулли, издал уже в 1696 г. первый печатный курс дифференциального исчисления «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий», способствовавший распространению новых методов. Ряд крупных результатов получил Лагранж, его работы сыграли важную роль в осмыслении основ анализа.

Как и в случае многих других разделов математики, неоценим вклад в развитие математического анализа, внесенный Л. Эйлером и К. Ф. Гауссом (1777–1855).

Энтузиазм, вызванный появлением нового мощного метода, позволяющего решать широкий круг задач, способствовал бурному развитию анализа в XVIII в. Но к концу этого столетия проблемы, возникшие уже у создателей дифференциального и интегрального исчислений, проявились весьма остро.

Основная трудность состояла в том, что точные определения таких ключевых понятий, как *предел, непрерывность, действительное число*, отсутствовали (соответственно и рассуждения содержали логические пробелы, а иногда были даже ошибочны). Характерный пример — определение непрерывности. Эйлер, Лагранж и даже Фурье (а он работал уже в начале XIX в.) называли непрерывной функцию, которая в своей области определения задана одним аналитическим выражением.

Огромный вклад в развитие математического анализа внес Карл Вейерштрасс (1815–1897). На рисунке вы видите интересный пример Вейерштрасса: везде непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция.



Тем самым «новая» математика не отвечала стандартам строгости, привычным для ученых, воспитанных на классических образцах греческих математиков. Интуиция, столь необходимая математикам, существенно опередила логику, тоже являющуюся неотъемлемой характеристикой математической науки. Гениальная интуиция таких гигантов, как Ньютон, Лейбниц, Эйлер, помогала им избегать ошибок. Но необходимы были прочные логические основы.

Характерны два высказывания, относящиеся к XVIII столетию. Известный математик М. Ролль писал, что новое исчисление есть коллекция гениальных ошибок. А великий французский мыслитель Вольтер заметил, что это исчисление представляет собой искусство вычислять и точно измерять вещи, существование которых не может быть доказано.

Решительный шаг к созданию прочного фундамента анализа был сделан в 20-е годы позапрошлого века французским математиком О. Коши (1789–1857), предложившим точные определения (часто говорили: «на языке эпсилон-дельта») пределов функции и последовательности и на их основе доказавшим многие фундаментальные теоремы анализа. Несколько раньше (1821 г.) определения предела и непрерывности, целый ряд других замечательных результатов (в том числе знаменитый пример функции, непрерывной на промежутке, но не имеющей производной ни в одной его точке) получил

чешский математик Б. Больцано (1781–1848), но его работы стали известны много позднее.

Лозунгом многих математиков XVII в. был: «Двигайтесь вперед, и вера в правильность результатов к вам придет».

Теория интегрирования

История понятия интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур, т.е. задачами на вычисление площадей. Вычислениями площадей поверхностей и объемов тел занимались еще математики Древней Греции и Рима.

Многие значительные достижения математиков Древней Греции в решении задач на нахождение площадей, а также объемов тел связаны с именем Архимеда (287–212 до н.э.).

Развивая идеи предшественников, Архимед определил длину окружности и площадь круга, объем и поверхность шара. В работах «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сферах» он показал, что определение объемов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объема конуса и цилиндра. Архимед разработал и применил методы, предвосхитившие созданное в XVII в. интегральное исчисление.

Потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем идеи Архимеда нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления. В XVII в. математики уже умели вычислять площади многих фигур с кривыми границами и объемы многих тел. А общая теория была создана во второй половине XVII в. в трудах великого английского математика Исаака Ньютона (1643–1716) и великого немецкого математика Готфрида Лейбница (1646–1716).

Первым европейским математиком, получившим новые формулы для площадей фигур и объемов тел, был знаменитый астроном Иоганн Кеплер (1571–1630). После исследований ряда ученых (П.Ферма, Д. Валлиса) И. Барроу открыл связь между задачами отыскания площадей и проведением касательной (т.е. между интегрированием и дифференцированием). Исследование связи между этими

8. Зак. 475

операциями, свободное от геометрического языка, было дано И. Ньютоном и Г. Лейбницем.

Современное обозначение интеграла восходит к Лейбницу, у которого оно выражало мысль, что площадь криволинейной трапеции есть сумма площадей бесконечно тонких полосок шириной d и высотой $f(x)$. Сам знак интеграла является стилизованной латинской буквой S (*summa*). Символ интеграла введен с 1675 г., а вопросами интегрального исчисления занимаются с 1696 г. Хотя интеграл изучают в основном ученые-математики, но и физики внесли свой вклад в эту науку. Практически ни одна формула физики не обходится без дифференциального и интегрального исчислений.

Ньютон и Лейбниц являются основателями интегрального исчисления. Они открыли важную теорему, носящую их имя:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $f(x)$ — функция, интегрируемая на отрезке $[a; b]$, $F(x)$ — одна из ее первообразных.

Рассуждения, которые приводили Ньютон и Лейбниц, несовершенны с точки зрения современного математического анализа. В XVIII в. крупнейший представитель математического анализа Леонард Эйлер эти понятия обобщил в своих трудах. Только в начале XIX в. были окончательно созданы понятия интегрального исчисления. Обычно при этом отмечают заслуги французского математика Огюстена Коши и немецкого математика Георга Римана.

Само слово «интеграл» придумал Якоб Бернулли (1690 г.). Оно происходит от латинского *integro*, которое переводится, как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. В 1696 г. появилось и название новой ветви математики — интегральное исчисление, которое ввел И. Бернулли. Употребляющееся сейчас название «первообразная функция» заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел Лагранж в 1797 г. Обозначение определенного интеграла ввел Иосиф Бернулли, а нижние и верхние пределы — Леонард Эйлер.

РАЗДЕЛ 3

Основы дискретной математики

Тема 3.1. Множества. Действия над множествами. Основные понятия комбинаторики

Термины по теме

- Множество
- Числовое множество
- Конечное множество
- Бесконечное множество
- Элемент множества
- Дискретное множество
- Бинарные отношения
- Пустое множество
- Равные множества
- Пересечение множеств
- Объединение множеств
- Разность множеств
- Подмножество
- Комбинаторика
- Перестановки
- Размещения
- Сочетания
- Треугольник Паскаля

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Числовые множества

Дискретная математика (конечная математика) — раздел математики, занимающийся изучением свойств объектов конечного характера. К их числу могут быть отнесены конечные множества, графы, некоторые математические модели.

В математике некоторые понятия являются неопределяемыми (первичными). К ним относится понятие множества (например, в «Алисе в Стране чудес»: «Множество чего? — А ничего, просто множество»).

Множества можно составлять из различных объектов, как материальных, так и абстрактных (числа, геометрические фигуры и т.д.), объединенных на основе самых различных признаков, содержащих различное количество элементов. Под **элементами** множества в математике понимают объекты, составляющие множество. Обычно множества обозначают прописными латинскими буквами: A, B, C и т.д., а элементы — малыми: a, b, c и т.д. Принадлежность элемента множеству записывают $a \in A$.

Оказывается удобным считать множеством **пустое** множество, т.е. множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначается $\varnothing$.

Рассмотрим некоторые примеры множеств.

1. Множество натуральных чисел: $\{1, 2, 3 \ldots\}$. Множество содержит бесконечное число элементов.

2. Множество всех делителей числа 12: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Конечное множество, содержащее 6 элементов.

3. Множество всех выпуклых четырехугольников. Множество содержит бесконечное число элементов. Несчетное множество.

4. Множество действительных чисел, являющихся корнями уравнения $x^2 = -1$. Уравнение не имеет действительных корней, поэтому множество его решений — **пустое.**

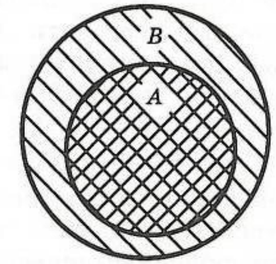
Порядком множества называется число его элементов. Если множество состоит из конечного числа элементов, то его порядком называется количество элементов. Если множество содержит бесконечное число элементов, оно называется бесконечным. Из бесконечных множеств можно выделить множества, элементы которых можно пронумеровать (множество натуральных чисел, множество, состоящее из членов арифметической или геометрической прогрессии, и т.д.) — **счетные** множества.

Множества можно задавать **характеристическим** свойством. Например, $Q = \{m/n \mid m \in Z;\ n \in N\}$ — множество рациональных чисел, состоящее из дробей, в числителе которых стоит целое число, а в знаменателе — натуральное.

Наглядную иллюстрацию множеств дают диаграммы Эйлера—Венна, в которых элементы множеств изображаются точками некоторых кругов.

Множество A называется **подмножеством** множества B $(A \in B)$, если любой элемент множества A принадлежит множеству B.

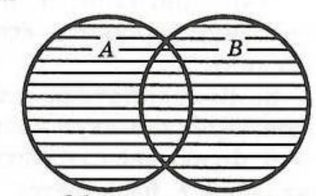
Любое множество есть подмножество самого себя, пустое множество является подмножеством любого множества. Если $A \in B$ и $B \in A$, то множества A и B состоят из одних и тех же элементов и называются **равными** **($A = B$)**. Если A — непустое подмножество множества B и $A \neq B$, то A называют **собственным подмножеством** множества B. Подмножество множества представленно на рисунке:



Действия с множествами

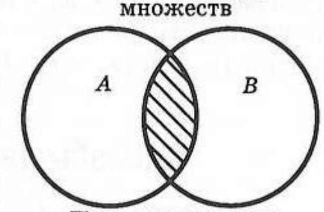
Пусть даны множества A и B.

1) **Объединением** множеств A и B называется множество C $(A \cup B = C)$, элементы которого являются элементами A или элементами B.



Объединение двух множеств

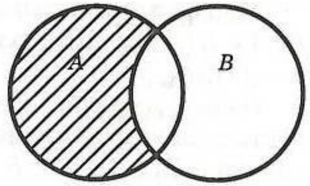
2) **Пересечением множеств** A и B называется множество C $(A \cap B = C)$, элементы которого являются элементами A и элементами B одновременно.



Пересечение двух множеств

3) **Разностью множеств** A и B $(A \backslash B)$ называется множество C $(A \backslash B = C)$, элементы которого явля-

ются элементами A и не принадлежат B.



Разность двух множеств

4) **Декартовым произведением** множеств A и B называется множество упорядоченных пар (x, y), где

$x \in A$, $y \in B$:

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Рассмотрим еще некоторые примеры множеств.

5. Множество целых чисел есть объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным, и множества, состоящего из числа 0:

$$N \cup \{-n \mid n \in N\} \cup \{0\} = Z.$$

6. Пересечением двух прямых (не обязательно различных) в пространстве может быть пустое множество (параллельные или скрещивающиеся прямые), точка (пересекающиеся прямые) или бесконечное множество точек (прямая, совпадающая с двумя заданными).

7. Разностью множества точек отрезка AB и множества точек, одинаково удаленных от точек A и B (плоскость, перпендикулярная AB и проходящая через его середину), являются все точки отрезка AB, кроме его середины.

8. Координатная плоскость является декартовым произведением двух координатных прямых: $R \times R = R^2$.

9. Функцией с областью определения D и множеством значений E называется любое подмножество декартова произведения $D \times E$, удовлетворяющее условию функциональности (если F — подмножество $D \times E$: $F \in D \times E$ и пары (x, y_1); $(x, y_2) \in F$, то $y_1 = y_2$).

Способы задания множеств

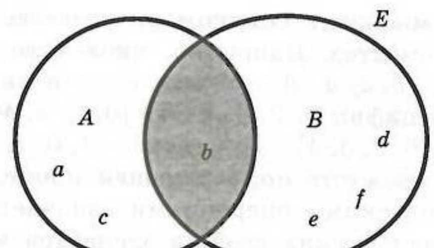
Множества могут быть заданы списком, порождающей процедурой, арифметическими операциями, описанием свойств элементов или графическим представлением.

1. Задание множеств **списком** предполагает перечисление элементов. Например, множество A состоит из букв $a, b, c, d : A = \{a, b, c, d\}$ или множество N включает цифры 0, 2, 3, 4 : $N = \{0, 2, 3, 4\}$.
   Пример: $\{0, 2, 3, 4\} = \{3, 4, 2, 0\} = \{4, 0, 2, 3\} = \ldots$
2. Задание множеств **порождающей процедурой** или арифметическими операциями означает описание характеристических свойств элементов множества: $X = \{x \mid H(x)\}$, т.е. множество X содержит такие элементы X, которые обладают свойством $H(x)$.
   Например:
   - $B = \left\{b \middle| b = \dfrac{\pi}{2} \pm k\pi, k \in N\right\}$, N — множество всех натуральных чисел;
   - $M_2^n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ или $M_2^n = \left\{m \middle| m = 2^n, n \in N\right\}$;
   - $C = A + B = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$.
3. Задание множества **описанием свойств** элементов: например, M — это множество чисел, являющихся степенями двойки.

К описанию свойств естественно предъявить требования точности и недвусмысленности. Так, «множество всех хороших песен 2012 года» каждый составит по-разному. Надежным способом однозначного задания множества является использование разрешающей процедуры, которая для любого объекта устанавливает, обладает ли он данным свойством и соответственно является ли элементом рассматриваемого множества.

Например, S — множество успевающих студентов. Разрешающей процедурой включения в множество S является отсутствие неудовлетворительных оценок в последней сессии.

4. **Графическое** задание множеств происходит с помощью диаграмм Эйлера—Венна. Замкнутая линия — круг Эйлера — ограничивает множество, а рамка — универсальное пространство E. Заданы два множества: $A = \{b, a, c\}$ и $B = \{b, d, e, f\}$. Если элементов множеств немного, то они могут на диаграмме указываться явно (показано на рисунке).



Основные свойства операций над множествами

Из определений объединения и пересечения множеств следует, что операции пересечения и объединения обладают следующими свойствами:

1. **Коммутативность.**
   $A \cup B = B \cup A$;
   $A \cap B = B \cap A$.
2. **Ассоциативность.**
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. **Дистрибутивность.**
   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
4. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
5. $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. **Законы де Моргана (законы двойственности).**
   1) $C\ (A \cup B) = C\ A \cap C\ B$;
   2) $C\ (A \cap B) = C\ A \cup C\ B$.

Доказательство данных свойств проводится на основе определения равенства двух множеств.

Бинарные отношения

Говорят, что на множестве M задано бинарное отношение φ, если в $M \times M$ выделено некоторое подмножество $R = R_\varphi$. Другими словами, бинарное отношение на множестве M — это подмножество в $M \times M$.

Утверждение, что элемент a состоит в отношении φ с элементом b означает, что пара $(a, b) \in \varphi$ или $a\varphi b \Leftrightarrow (a, b) \in R$.

Бинарное отношение φ, заданное на множестве M, называется:

1) рефлексивным, если $a\varphi a$ для $\forall a \in M$,
2) симметричным, если $a\varphi b \Rightarrow b\varphi a$,
3) антисимметричным, если $(a\varphi b)$ и $(b\varphi a) \Rightarrow a = b$,
4) транзитивным, если $(a\varphi b)$ и $(b\varphi c) \Rightarrow a\varphi c$.

Бинарное отношение φ, заданное на множестве M, называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Рассмотрим это на примере.

Пусть на множестве $M = \{1, 2, 3\}$ задано бинарное отношение $\tau = \{(1, 2); (2, 1); (1, 1); (2, 2); (3, 3)\}$. Доказать, что заданное таким образом бинарное отношение τ является отношением эквивалентности.

Доказательство.

Нам нужно показать, что бинарное отношение τ обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

1) Нам нужно проверить, что для любого элемента a из множества M пара (a, a) принадлежит бинарному отношению τ. Здесь $a = 1, 2, 3$ и из определения τ видно, что пары $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ принадлежат бинарному отношению τ.
2) Выполнение условия $(a, b) \in \tau \Rightarrow (b, a) \in \tau$ видно прямо из определения бинарного отношения τ.
3) Должно выполняться свойство: $(a, b) \in \tau$, $(b, c) \in \tau \Rightarrow (a, c) \in \tau$.

Действительно $(1, 2) \in \tau$, $(2, 1) \in \tau \Rightarrow (1, 1) \in \tau$, $(1, 1) \in \tau$, $(1, 2) \in \tau \Rightarrow (1, 2) \in \tau$, ну и так далее. Доказательство окончено.

Операции над бинарными отношениями

Мы уже знаем, что бинарные отношения являются множествами и, следовательно, можно говорить о равенстве бинарных отношений и о включении одного бинарного отношения в другое: $\varphi = \psi$, $\varphi \in \psi$.

На бинарные отношения, заданные на некотором множестве, переносятся общие операции над множествами. Пусть φ и ψ — бинарные отношения, заданные на множестве A. Тогда

1) $\varphi \cap \psi$ — есть бинарное отношение в A, являющееся пересечением отношений φ и ψ;
2) $\varphi \cup \psi$ — есть бинарное отношение в A, являющееся объединением отношений φ и ψ;
3) $\varphi \backslash \psi$ — есть бинарное отношение в A, являющееся разностью отношений φ и ψ;
4) $\overline{\varphi}$ — есть бинарное отношение в A, являющееся дополнением к бинарному отношению φ в A, т.е. $\overline{\varphi} = A^2 \backslash \varphi$.

Для любых бинарных отношений φ, ψ, ρ, заданных на некотором множестве A, справедливо следующее равенство: $(\varphi\psi)\rho = \varphi(\psi\rho)$. Оно означает, что суперпозиция бинарных отношений обладает свойством ассоциативности. Это утверждение говорит о том, что какими бы двумя различными способами мы ни расставляли скобки в выражении $\varphi_1\ \varphi_2 \dots\ \varphi_n$, чтобы получить суперпозицию двух отношений, мы получим равные отношения.

Пусть на множестве A задано бинарное отношение φ, тогда отношением, обратным к φ, называется отношение φ^{-1}, также заданное на A, которое состоит из тех и только тех пар (b, a), для которых справедливо, что $(a, b) \in \varphi$.

Дискретное множество

Под множеством понимается набор, совокупность, собрание каких-либо объектов (которые называются элементами множества). Множество, все элементы которого изолированы друг от друга, называется дискретным. Для измерения степени изолированности элементов данного множества вводится понятие расстояния между элементами. Таким расстоянием для чисел может быть, например, модуль разности между ними; для точек на плоскости — геометрическое расстояние.

Дискретное множество определяется как множество объектов, расстояние между которыми не меньше некото-

рой наперед заданной величины L. Конечное множество всегда дискретно (в качестве L берется минимальное из расстояний между элементами этого множества). Дискретно любое множество целых чисел (для них $L = 1$) и любое множество дробей, имеющих общий знаменатель m. Всякое дискретное множество счетно, т.е. его элементы можно пронумеровать целыми числами, однако не всякое счетное множество дискретно, например, счетное множество $\{1, j, », \cdots, *, -, a, b\}$ не дискретно, так как с ростом n расстояние между соседними элементами стремится к нулю. Если задано дискретное множество точек прямой с минимальным расстоянием L, то любой отрезок длины может содержать не более $g + 1$ точек этого множества.

Разница между дискретным и непрерывным представлением информации хорошо видна на примере часов. В электронных часах с цифровым циферблатом информация представляется дискретно — цифрами, каждая из которых четко отличается друг от друга. В механических часах со стрелочным циферблатом информация представляется непрерывно — положениями двух стрелок, причем два разных положения стрелки не всегда четко отличимы (особенно, если на циферблате нет минутных делений). Вообще любое представление информации с помощью конечного множества символов (букв, цифр, знаков препинания, математических знаков) дискретно; графическое представление (рисунок, чертеж) непрерывно.

Типичный пример дискретного устройства — ЭВМ, состояние памяти которой представляется последовательностью двоичных цифр — нулей и единиц, все операции в ней производятся с дискретными представлениями информации. Типичные примеры аналоговых устройств — измерительные приборы, представляющие информацию положением стрелки (вольтметр, спидометр), непрерывной кривой, выдаваемой на экран (осциллограф) или на бумагу (кардиограф) и т.д. Переход от аналоговых представлений информации к цифровым (например, ввод результатов измерений ЭВМ) и обратно в технике осуществляется специальными устройствами: аналого-цифровыми и цифро-аналоговыми преобразователями.

Другой пример, измерение температуры больного — работа с дискретными величинами, так как каждая конкретная температура — это отдельная дискретная величина. А создание кардиограммы сердца — это исследование непрерывной величины вследствие того, что линия кардиограммы — величина непрерывная.

Элементы комбинаторики

При изучении курса математической статистики приходится использовать методы одного из разделов математики, который хотя формально и не относится к высшей, вузовской математике, но, к сожалению, не изучается в средней школе. Этот раздел — комбинаторика, «наука о способах подсчета вариантов». Эта наука имеет тот же примерно 300-летний возраст, что и статистика. Комбинаторика — сверстница теории вероятностей, теоретического фундамента прикладной статистики, она изучает простейшие соединения. Как и в древней, в современной статистике невозможно обойтись без навыков просчитывать в уме или по крайней мере быстро, по простым формулам, варианты событий, размещений предметов, значений величин и т.п.

Рассмотрим пример решения практического вопроса с использованием правил комбинаторики. Пусть решается вопрос об установлении проводной связи между 10 предприятиями фирмы по следующему принципу — каждое предприятие должно иметь отдельный канал связи со всеми остальными. Сколько таких каналов придется установить в фирме?

Для решения вопроса можно нарисовать выпуклый 10-угольник и провести в нем все диагонали, пересчитав в конце их число и не забыв добавить число сторон. Человек, знающий комбинаторику, укажет верный ответ — всего требуется 45 каналов. Для освоения наиболее популярных применений комбинаторики рассмотрим ее основные понятия — перестановки, размещения и сочетания.

Перестановками называют операции над упорядоченным рядом из n различных объектов, в процессе

которых «списочный состав» ряда не изменяется, но «места» объектов в этом ряду изменяются от варианта к варианту. Количество перестановок — это количество новых упорядоченных множеств, составленных из данного множества с тем же количеством элементов.

Попробуем найти число перестановок в ряду из 1, 2 и 3 предметов.

Воспользуемся для этого простенькой схемой:

$n = 1$	A	1 вариант.
$n = 2$	AB BA	$1 \cdot 2 = 2$ варианта.
$n = 3$	ABC ACB BCA BAC CAB CBA	$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ вариантов.

Можно доказать строго, что в общем случае число перестановок в ряду из n элементов составит

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n,$$

$n!$ — факториал числа n — произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n.

Свойства перестановок: $1! = 1$; $0! = 1$.

Рассмотрим пример.

Дано множество $A = \{1, 2, 3\}$.

Составим все перестановки чисел этого множества: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Их 6.

Вычислим по формуле $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Размещениями из n элементов по m элементам A_n^m называют конечные упорядоченные множества, содержащие m элементов, выбранных из n элементов множества A. То есть количество размещений — это количество новых упорядоченных множеств, составленных из данного множества с другим количеством элементов. Число всевозможных размещений вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Свойства размещений: $A_n^1 = n$; $A_n^0 = 1$; $A_n^n = n!$

Рассмотрим пример.

Дано множество $A = \{1, 2, 3\}$.

Составим все размещения двух чисел этого множества: 12, 21, 13, 31, 23, 32. Их 6.

Вычислим по формуле $A_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6.$

Сочетаниями называют операции над множеством из n различных объектов, в процессе которых образуют подмножества из k элементов, взятых из исходного множества, так, чтобы варианты подмножеств отличались друг от друга хотя бы одним элементом. То есть количество сочетаний — это количество новых неупорядоченных множеств, составленных из данного множества с другим количеством элементов.

Опустим доказательство формулы для расчета числа сочетаний в общем виде и приведем примеры для числа сочетаний из 3 по 2 и из 5 по 3.

Если элементы исходного множества A, B, C.

Варианты подмножеств: AB, AC, BC — всего три.

Если элементы исходного множества A, B, C, D, E.

Варианты подмножеств: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE — всего десять.

Если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения и без упорядочивания, то различными исходами следует считать m — элементные подмножества, имеющие различный состав. Получаемые при этом комбинации элементов (элементарные исходы) носят название **сочетание из n элементов по m**, а их общее число определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}.$$

Свойства сочетаний: $C_n^1 = n$; $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$.

Рассмотрим пример.

Дано множество $A = \{1, 2, 3\}$.

Составим все сочетания двух чисел этого множества: 1 и 2, 2 и 3, 1 и 3. Их 3.

Вычислим по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3.$$

Существует еще один способ вычисления числа сочетаний из n по m — с использованием коэффициентов в развернутой форме бинома Ньютона $(p+q)^n$. В самом

деле, например, при $n = 3$ коэффициенты при степенях разложения составляют 1, 3, 3, 1, а это и есть сочетания из 3 по 0, 1, 2, 3 и 4 элементов.

С помощью сочетаний рассчитывается треугольник Паскаля, который заполняется значениями C_n^m, если $m \leqslant n$.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Проверяется треугольник Паскаля просто: первый элемент любого основания равен 1, второй — номеру основания, а все последующие — сумме двух «вышестоящих» (верхнего и левого).

Для чисел C_n^m, называемых также **биномиальными коэффициентами**, справедливы следующие тождества, часто оказывающиеся полезными при решении задач:

$C_n^m = C_n^{n-m}$ (свойство симметрии);

$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$; $C_n^0 = 1$ (рекуррентное соотношение);

$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ (следствие биномиальной формулы Ньютона).

Для любого натурального n верна формула, называющаяся биномом Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}b + \dots + C_n^m\, a^{n-m}b^m + \dots + C_n^n\, b^n .$$

Коэффициенты C_n^m, равные числу сочетаний из n элементов по m, называются биномиальными коэффициентами. Частные случаи бинома Ньютона ($n = 2$; 3) входят в список формул сокращенного умножения:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3,$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3.$$

Задания для самостоятельной работы

№ 94.

Вычислите значения перестановок, размещений и сочетаний.

а) P_4; б) P_6; в) A_4^3; г) A_5^4; д) C_4^3; е) C_5^2.

Используйте таблицу «Основные формулы комбинаторики»:

Понятия	Формулы для вычисления	Основные свойства
Перестановки	$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$	$1! = 1;\ 0! = 1$
Размещения	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$A_n^1 = n;\ A_n^0 = 1;\ A_n^n = n!$
Сочетания	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$	$C_n^1 = n;\ C_n^0 = 1;\ C_n^n = 1$

Решение.

а) $P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$;

б) $P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$;

в) $A_4^3 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = 24$;

г) $A_5^4 = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 120$;

д) $C_4^3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1!} = 4$;

е) $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

№ 95.

Вычислите размещения:

а) A_6^5; б) A_7^4; в) A_9^8; г) A_4^2; д) A_8^5.

№ 96.

Вычислите сочетания:

а) C_8^5; б) C_7^6; в) C_9^8; г) C_{10}^9; д) C_8^4.

Вопросы по теме

1. Что такое множество?
2. Дайте определение для множеств: числовое, конечное, бесконечное, пустое, дискретное, подмножество.
3. Какие множества называют равными?
4. Какие действия с множествами вам известны? Дайте им определения.
5. Что такое бинарное отношение?
6. Дайте определения основным понятиям комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.
7. По каким формулам находятся перестановки, размещения, сочетания?
8. Перечислите основные свойства перестановок, размещений и сочетаний.
9. Что из себя представляет треугольник Паскаля?
10. Где используются понятия дискретной математики?

Тема 3.2. Основные понятия теории графов

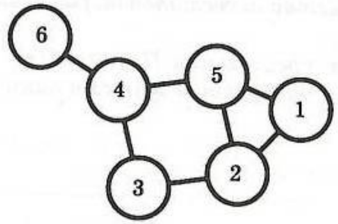
Термины

- Граф
- Мультиграф
- Двудольный граф
- Пустой граф
- Простой граф
- Ребро графа
- Ориентированный граф
- Смежные вершины
- Инцидентные ребра
- Кратные ребра
- Степень вершины графа
- Дерево графа
- Вершина графа
- Иерархическая структура

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Основные положения теории графов

Теория графов — раздел математики, особенность которого — геометрический подход к изучению объектов. Основное понятие теории — **граф** — задается множеством вершин (точек) и множеством ребер (связей), соединяющих некоторые пары вершин. Пример графа — схема метрополитена: множество станций (вершины графа) и соединяющих их линий (ребра графа).

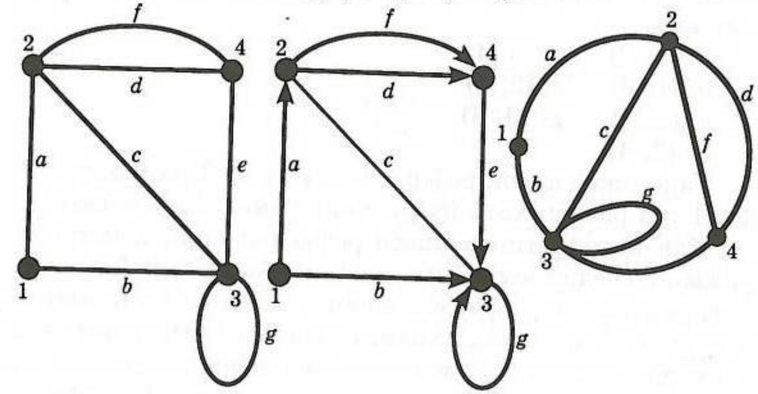


На рисунке пример простейшего графа, у которого 6 вершин и 7 ребер.

Иногда граф называют деревом — связный граф без циклов. Исследования деревьев, в отличие от общей теории графов, с самого начала велись в применении к наукам, а не играм. Термин (вероятнее всего позаимствованный из сочетания «фамильное древо») и само понятие ввел в обращение немецкий физик Г. Кирхгоф. Его публикация 1847 г., посвященная электрическим цепям, внесла огромный вклад в теорию.

Граф — совокупность точек и линий, в которой каждая линия соединяет две точки. Точки называются **вершинами** графа, линии — **ребрами** графа. Если ребро соединяет две вершины, то говорят, что оно им **инцидентно**, а вершины, соединенные ребром, называются **смежными**. Две вершины, соединяемые ребром, могут совпадать; такое ребро называется петлей. Число ребер, инцидентных вершине, называется **степенью** вершины. Если два ребра инцидентны одной и той же паре вершин, они называются **кратными**; граф, содержащий кратные ребра, называется **мультиграфом**.

Граф 1 содержит четыре вершины $\{1, 2, 3, 4\}$ и семь ребер $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ (см. рисунок).



Граф 1 Граф 2 Граф 3

Ребро a инцидентно вершинам 1 и 2; ребро g инцидентно только вершине 3 и является петлей, вершины 2 и 3 смежны, а вершины 1 и 4 не смежны; ребра d и f — кратные; степень вершины 2 равна 4.

Ребро, соединяющее две вершины, может иметь направление от одной вершины к другой; в этом случае оно называется **направленным, или ориентированным**, и изображается стрелкой. Граф, в котором все ребра ориентированные, называется ориентированным графом (**орграфом**); ребра орграфа часто называют **дугами**. Дуги именуются кратными, если они не только имеют общие вершины, но и совпадают по направлению. Граф 2 — ориентированный; дуги d и f — кратные.

Граф однозначно задан, если заданы множество его вершин, множество ребер и указаны все инцидентности (т.е. указано, какие вершины какими ребрами соединены). Наиболее наглядно граф задается рисунком; однако не все детали рисунка одинаково важны; в частности, несущественны геометрические свойства ребер (длина, кривизна и т.д.) и взаимное расположение вершин на плоскости. Для машинной обработки более удобны символические представления графов, в которых несущественных геометрических деталей нет, например представление графа списками вершин и ребер. Граф 1 задается списком вершин {1, 2, 3, 4} и списком ребер, в котором для каждого ребра указана пара инцидентных ему вершин:

a: (1, 2) *e:* (3, 4)
b: (1, 3) *f:* (2, 4)
c: (2, 3) *g:* (3, 3)
d: (2, 4)

Такой же список ребер имеет и граф 3; поэтому графы 1 и 3 равны, хотя их рисунки заметно отличаются.

Для неориентированного ребра порядок, в котором указаны соединяемые им вершины, неважен. Для ориентированного ребра это важно: первой указывается вершина, из которой выходит ребро. Например, орграф 2 получен из графа 1 введением ориентации ребер; однако, для того чтобы приведенный выше список ребер описывал граф 2, в нем нужно изменить описание ребер *c* и *d* — *c*: (3, 2) и *d:* (4, 2).

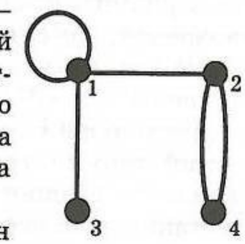
Граф может вовсе не иметь ребер; тогда он состоит из изолированных вершин и называется пустым. Если в неориентированном графе с n вершинами нет кратных ребер и петель, то максимальное число ребер в нем равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Это соответствует случаю, когда между любыми двумя вершинами есть ребро; такой граф называется полным.

Маршрут — это последовательность ребер в неориентированном графе, в котором конец каждого ребра совпадает с началом следующего ребра. Число ребер маршрута называется его длиной. Цикл — это замкнутый маршрут, т.е. маршрут, в котором начальная вершина совпадает с конечной. В графе 1 *a, c, e* — маршрут; *a, f, e, b* — цикл. В орграфе ориентированный маршрут, т.е. маршрут, в котором все дуги проходятся по их ориентации, называется путем, а путь, являющийся циклом, называется ориентированным циклом. В графе 2 *a, d, e* — путь, *f, e, c* — ориентированный цикл. Иногда в литературе используется и другая терминология: например, замкнутый маршрут именуют контуром, а циклом называют только такой контур, который не пересекает сам себя, т.е. не содержит повторяющихся вершин.

Неориентированный граф называется связным, если между любыми двумя его вершинами есть маршрут. Орграф считается связным, если он связан без учета ориентации его дуг. Связный граф с n вершинами содержит не менее $n-1$ ребер. Орграф называется сильно связным, если из любой вершины в любую другую существует путь. Граф 2 — связный, но не сильно связный, так как в вершину 1 нет путей из всех вершин.

Путь называется простым, если все его вершины различны. Замкнутый путь, в котором все ребра различны, называется циклом. Простой цикл — это замкнутый путь, все вершины которого попарно различны. Гамильтоновым называется граф, в котором существует простой цикл, содержащий все вершины графа (но не обязательно все его ребра).



Степень вершины deg(*v*) графа — это число ребер, инцидентных данной вершине *v*, причем петли учитываются дважды. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер.

Если сложить степени всех вершин некоторого графа, то каждое ребро внесет в эту сумму вклад, равный 2, поэтому справедливо следующее утверждение:

$$\sum_{a\in V} \deg(a) = 2m.$$

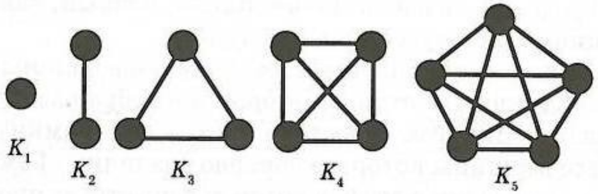
Это равенство известно как «лемма о рукопожатиях». Из него следует, что число вершин нечетной степени в любом графе четно.

Вершину степени 0 называют изолированной.

Граф называют регулярным степени d, если степень каждой его вершины равна d.

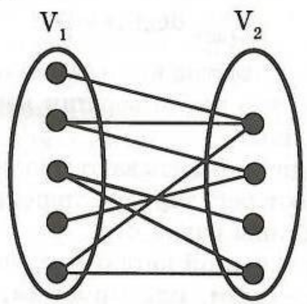
Граф, не содержащий петель и кратных ребер, называется **обыкновенным**, или **простым, графом (simple graph)**. Во многих публикациях используется другая терминология: под графом понимается простой граф, граф с кратными ребрами называют **мультиграфом**, с петлями — **псевдографом**.

Некоторые классы графов получили особые наименования. Граф с любым количеством вершин, не содержащий ребер, называется **пустым.** Обыкновенный граф с n вершинами, любая пара вершин которого соединена ребром, называется **полным** и обозначается K_n (очевидно, что в полном графе $n(n-1)/2$ ребер).

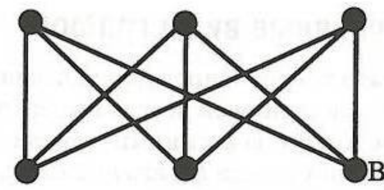


Граф, вершины которого можно разбить на непересекающиеся подмножества V_1 и V_2 так, что никакие две вершины, принадлежащие одному и тому же подмножеству, не смежны, называется **двудольным** (или бихроматическим, или графом Кенига) и обозначается B_{mn} $(m=|V_1|,\ n=|V_2|,\ m+n=|V|)$.

Двудольный граф, или **биграф,** — это математический термин теории графов, обозначающий граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, т. е. не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.



Полный двудольный граф — такой двудольный граф, что каждая вершина множества V_1 связана со всеми вершинами множества V_2, и наоборот; обозначение — K_{mn}. Замечание: *полный двудольный* граф B_{mn} не является *полным* (за исключением $B_{11}=K_2$).



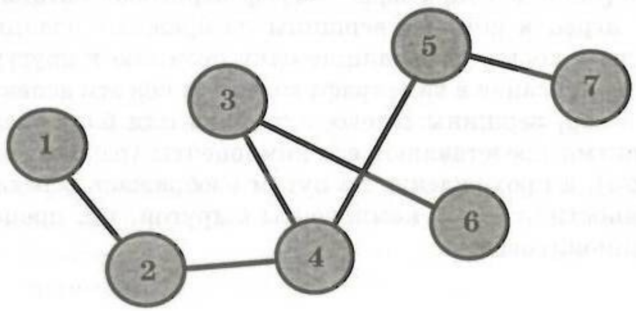
Понятие графа благодаря его наглядности и высокой общности используется часто в информатике и служит основным средством для описания структуры сложных объектов и функционирования систем. При описании структур вершинами являются компоненты объекта, а ребрами — связи между ними (примеры — вычислительные сети, логические схемы, иерархические структуры). При описании функционирования вершинам соответствуют состояния системы, а ребрам — переходы между состояниями (примеры — граф переходов автомата; граф игры, в котором вершины изображают позиции, а дуги — ходы, переводящие одну позицию в другую). Иногда описание в виде графа содержит оба эти аспекта. Например, вершины сетевого графика или блок-схемы алгоритма представляют его компоненты (работы, операторы), а прохождение по путям изображает передачу активности от одной компоненты к другой, т.е. процесс функционирования.

Свойства графов

1. Число нечетных вершин графа всегда четно. Не существует графа, имеющего нечетное число нечетных вершин.
2. Если все вершины графа четные, то можно одним росчерком начертить граф, начав движение с любой из вершин и закончив его в ней же.
3. Граф только с двумя нечетными вершинами можно начертить одним росчерком, при этом движение нужно начать с одной из этих нечетных вершин и закончить в другой.
4. Граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Основные виды графов

1. Дерево — это неориентированный связный граф без циклов. Дерево с n вершинами всегда имеет $(n - 1)$ ребер. Между любыми двумя вершинами дерева существует единственный маршрут (если бы его не было, нарушилась бы связность, а если бы было два маршрута с одинаковыми концами, то получился бы цикл). Поэтому дерево иногда определяется как минимальный связный граф, т.е. граф, в котором удаление любого ребра нарушает связность. Вершина дерева, которая соединена ребром только с одной вершиной, называется висячей вершиной, или листом. В любом дереве, содержащем более одной вершины, имеется не менее двух листьев. На рисунке граф 1 представляет пример неориентированного дерева. Его листьями являются вершины 1, 6 и 7.



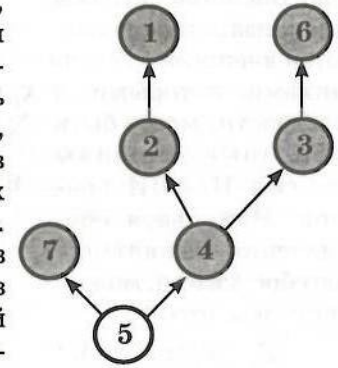
Деревом называется связный граф без циклов.

Корневое дерево — это связный орграф без циклов, удовлетворяющий следующим условиям:

1) имеется ровно одна вершина, называемая корнем, к которой не ведет ни одной дуги;
2) к каждой вершине, отличной от корня, ведется ровно одна дуга;
3) преемники всякой вершины упорядочены.

Вершины корневого дерева, не имеющие преемников, называются листьями.

Ориентированное дерево — это граф с выделенной вершиной (корнем), в котором между корнем и любой вершиной существует единственный путь. При этом возможны два варианта ориентации: либо все пути ориентированы от корня к листьям, либо все пути ориентированы от листьев к корню. Ориентированное дерево можно получить из неориентированного дерева, выбрав в нем любую вершину в качестве корня и один из двух вариантов ориентации дуг. Например, граф 2 получен из графа 1 выбором вершины 5 в качестве корня и ориентацией дуг от корня к листьям (на рисунке). Если ориентацию всех



дуг поменять на противоположную, то получится дерево с ориентацией от листьев к корню; если же поменять ориентацию только у частей дуг, то полученный граф не будет ориентированным деревом.

Деревья используются в различных математических моделях, связанных с информатикой: в теории формальных систем (дерево вывода); при описании и проектировании иерархических структур, в частности при организации больших массивов данных в информационных системах баз данных; в задачах планирования (дерево целей, дерево перебора вариантов); в теории игр (вершины — позиции игры, дуги — ходы, переводящие одну позицию в другую, корень — начальная позиция, листья — заключительные позиции).

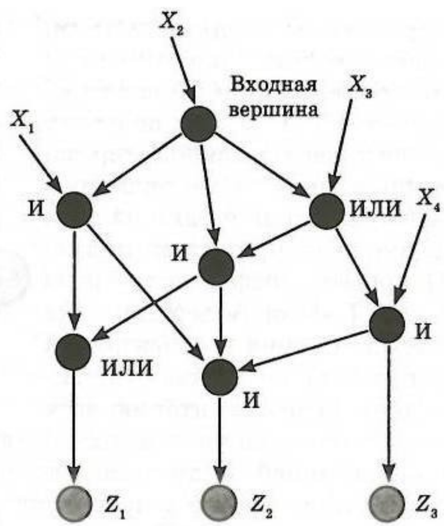
2. И/ИЛИ граф — специальный тип графа, широко используемый в искусственном интеллекте и программировании, а также в задачах теории принятия решений, исследовании операций и системном анализе. Граф такого типа описывает развитие некоторого процесса от начальной вершины графа к множеству конечных вершин. Все остальные (не начальная и не конечные) вершины делятся на два типа: вершины И и вершины ИЛИ. Вершина первого типа возбуждается только при наличии сигналов активизации на всех ее входах, а вершина ИЛИ — при появлении хотя бы одного сигнала активизации на любом из ее входов. Активизированная вершина передает сигналы активизации на все сопряженные с ней верши-

ны. Внешние сигналы активизации порождаются внешними источниками, которыми, в частности, могут быть выходные вершины других И/ИЛИ графов. Используя обозначения, принятые в алгебре логики, можно записать, что

$$Z_1 = x_2\,(x_1 \vee x_3),$$

$$Z_2 = x_1\,x_2\,x_3\,x_4,$$

$$Z_3 = (x_2 \vee x_3)\,x_4.$$



Выходные вершины

3. Иерархическая структура — это структура системы, части (компоненты) которой связаны отношениями включения или подчинения. Иерархическую структуру имеют предприятия (завод состоит из цехов и служб управления и обеспечения, цеха — из участков, службы — из отделов и т.д.). Аналогично организована административно-территориальная структура государств (например, республика — область — район — населенный пункт). При этом территории связаны отношениями включения: районы входят в область, а органы управления связаны отношениями подчинения — районные власти подчиняются областным. Армейские соединения (дивизия — полк — батальон — рота — взвод — отделение — солдат) также образуют структуру подобного типа.

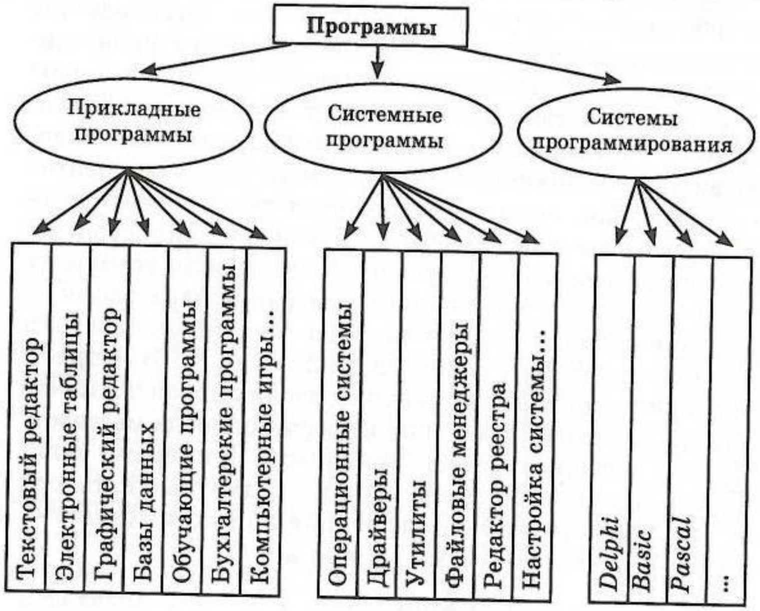
Иерархическая структура изображается ориентированным деревом, в котором вершины соответствуют компонентам, а дуги — связям. Это дерево обычно располагается на плоскости следующим образом: наверху — корень дерева (1-й уровень иерархии), изображающий систему в целом (предприятие, государство) или центр, которому все подчинено (директор, правительство). Ниже на одной горизонтали — компоненты, непосредственно связанные с корнем (компоненты 2-го уровня — цеха,

области). На следующей горизонтали — компоненты 3-го уровня (участки, районы), т.е. компоненты, связанные с компонентами 2-го уровня, и т.д. От каждой компоненты на верхний уровень идет только одна дуга, именно поэтому граф такой структуры является деревом. Листья этого дерева соответствуют нижним компонентам структуры. Длина пути от вершины к корню равна числу более высоких уровней, т.е. «вышестоящих инстанций». В административных структурах (армия, предприятие, министерство) пути в дереве, как правило, отражают и информационные потоки: сверху вниз — руководящие указания, снизу вверх — отчетность и оперативная информация. Поскольку путь от любой вершины к корню в дереве единственен и определяется списком содержащихся в нем вершин, его можно использовать для идентификации (наименования или нумерации) компонентов системы. Так, почтовый адрес представляет собой путь в дереве почтовой службы (близкой к административно-территориальному дереву). Используемая во многих научных книгах позиционная нумерация параграфов — это путь в дереве оглавления книги (например, параграф 3.2.1 означает параграф 1, глава 2, часть 3). Этот прием иерархической идентификации с давних пор используется для организации больших информационных массивов. Помимо почтовой службы типичными примерами являются различные классификации: предметные каталоги книг в библиотеках, классификация в биологии (класс — отряд — семейство — род — вид) и т.д.

Возможны иерархические структуры, в которых связи между уровнями не обязательно образуют дерево. Так будет, например, если у подчиненного есть несколько начальников верхнего уровня, функции между которыми разделены, а сами эти начальники друг другу не подчиняются. Так, руководитель предприятия должен исполнять указания директора объединения, куда входит это предприятие, но он же подчиняется указаниям санэпидстанции.

В информатике иерархические структуры широко используются при проектировании и описании различных информационных структур и управленческих систем (базы данных, вычислительные сети, сети связи, организационные системы и т.д.). Например:

Классификация компьютерных программ



Почти любые знания можно представить в виде графа, т.е. совокупности объектов (понятий) и связей (отношений) между ними.

Действия с графами

Поскольку графы можно рассматривать как частные случаи бинарных отношений, то для них могут быть определены аналогичные операции. Укажем некоторые из них.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — два графа.

Объединение графов G_1 и G_2 есть граф, у которого

$$V = V_1 \cup V_2,\ E = E_1 \cup E_2.$$

Соединение графов $G_1 + G_2$ есть граф, у которого

$$V = V_1 \cup V_2,\ E = E_1 \cup E_2 \cup \{(v_1, v_2)\}$$

для всех $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Прямое произведение графов есть граф, у которого

$$V = V_1 \cdot V_2,$$

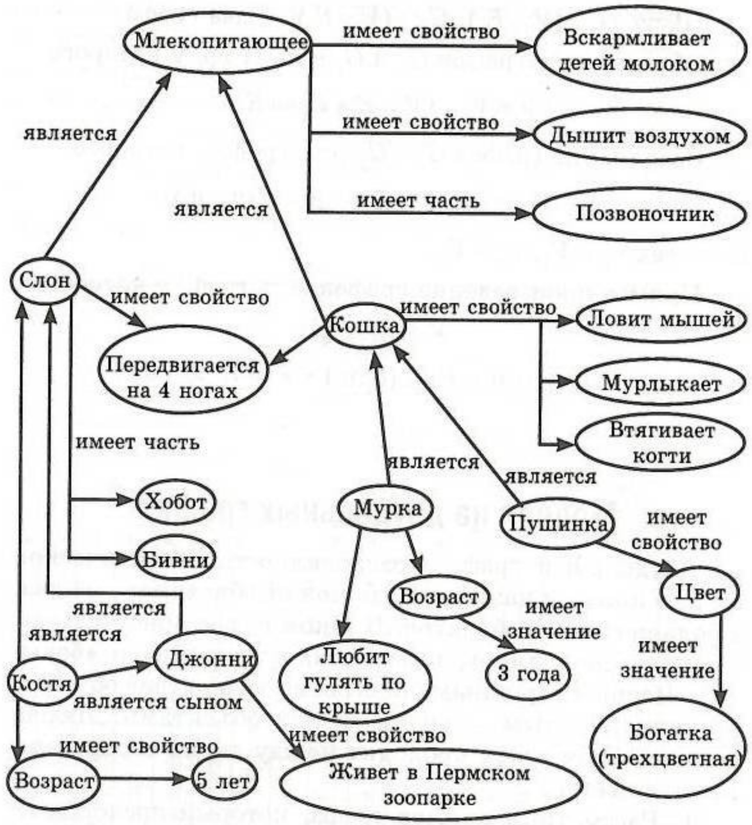
$$((c_1,c_2),(v_1,v_2)) \in E \Leftrightarrow (c_1,v_1) \in E \text{ и } (c_2,v_2) \in E_2.$$

Модели на двудольных графах

Двудольный граф — разновидность семантической сети, в которой каждая связь может объединять не два, а большее число объектов. В таком графе присутствуют вершины двух типов, назовем их «черными» и «белыми». Черным вершинам ставятся в соответствие объекты (понятия), белым — связи между объектами. Любая дуга на таком графе проходит между двумя вершинами разных цветов.

1. Рассмотрим пример графа, который представлен семантической сетью (модель в виде графа) и наглядно показывает смысл заключенной в нем информации.

Данный пример хорошо иллюстрирует отличие модели знаний от базы данных. Семантическая сеть наглядно отражает взаимосвязь свойств входящих в нее объектов. Например, если в базу данных о животных добавить новую запись «Карбон — это слон», то мы будем знать про Карбона один только этот факт и все. Но если добавить этот факт в данную семантическую сеть, то сразу же станет ясно, что Карбон — это млекопитающее, его детей надо вскармливать молоком, что он дышит воздухом, передвигается на четырех ногах, имеет хобот, бивни и позвоночник, принадлежит к тому же классу, что Джонни, Костя и пр.



2. Рассмотрим другой пример — структура органов власти во Франции во времена Третьей республики (1875–1940 гг.).

Органы власти включают в себя центральные органы и органы местного самоуправления (муниципалитеты). Центральные органы — это президент, правительство и Национальное собрание (парламент) из двух палат (нижняя — палата депутатов, верхняя — сенат). Избиратели непосредственно избирают органы местного самоуправления и палату депутатов. Выборы сената — многостепенные. Муниципалитеты выбирают коллегию выборщиков, а они уже выбирают сенаторов. Сенат и палата депутатов на совместном заседании выбирают президента. Президент назначает правительство, но должен

при этом учитывать мнение палаты депутатов, поскольку она имеет право выразить правительству недоверие (т.е. отправить его в отставку). Правительство назначает в каждый департамент префекта, который имеет право отменить любое решение местной власти.

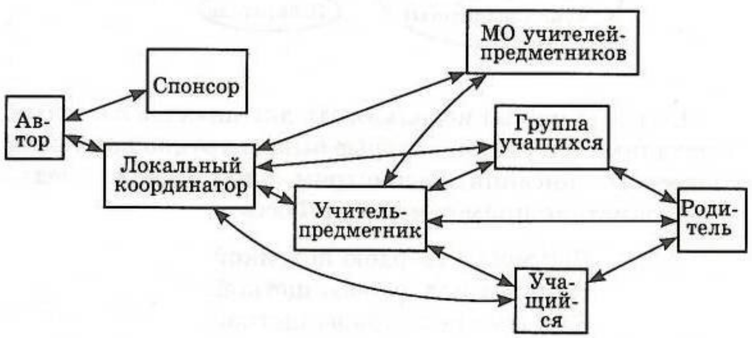
3. Графы можно использовать для анализа сложных запутанных ситуаций, которые бывает трудно понять из словесного описания. Рассмотрим, для примера, следующее описание примет мистера Фосса:

Боксеры с твердою походкой
Не моют пол зубною щеткой.
Кто моет пол зубною щеткой,
Тот наделен душою кроткой.
Кто пол мыть щеткой не желает,
Суровым нравом обладает.
Суровый нрав у тех бывает,
Кто книжек вовсе не читает.
Фосс — враг и книжек и газет,
Ответь, боксер он или нет?

Для описания ситуации используется ряд утверждений. Представим эти утверждения и связи между ними в виде графа. Он может выглядеть, например, следующим образом:

Глядя на этот граф, ответить на поставленный вопрос совсем просто: мистер Фосс не читает книг, следовательно, он имеет суровый нрав, следовательно, он не моет пол зубною щеткой, следовательно, он боксер.

4. Следующий пример графа помогает планировать свою деятельность. В настоящее время любой преподаватель использует в своей деятельности проектный метод обучения или его элементы. Ниже представлен граф — схема управления при создании большого проекта.

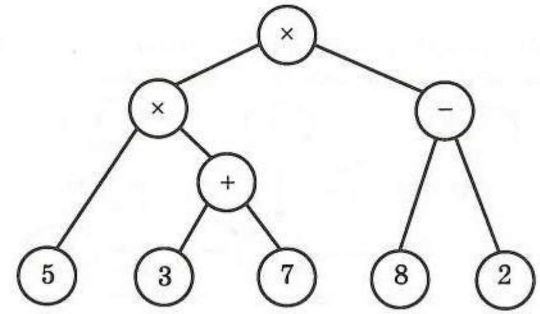


5. Традиционная математическая символика является формальным языком математики. В отличие от естественных языков формальные языки не носят национального характера. Они придуманы для профессиональной деятельности людей и понятны специалистам всего мира.

Смысл математического выражения заключается в определяемой им последовательности вычислительных операций. Чтобы его понять, нужно знать правила

старшинства операций, правила раскрытия скобок. Например, в выражении $7 - 5 \cdot 3$ в первую очередь следует выполнить действие, записанное вторым, что может показаться противоестественным. Если этого правила не знаешь, то ошибешься в вычислениях.

Наглядным средством изображения последовательности вычисления математических выражений, т.е. их смысла, являются графы. Такой граф представляет собой дерево, листьями которого являются числа, а прочими вершинами — операции. Дуги связывают вершину-операцию с вершинами-операндами. Например, для формулы $5 \cdot (3 + 7) \cdot (8 - 2)$ дерево будет иметь такой вид:



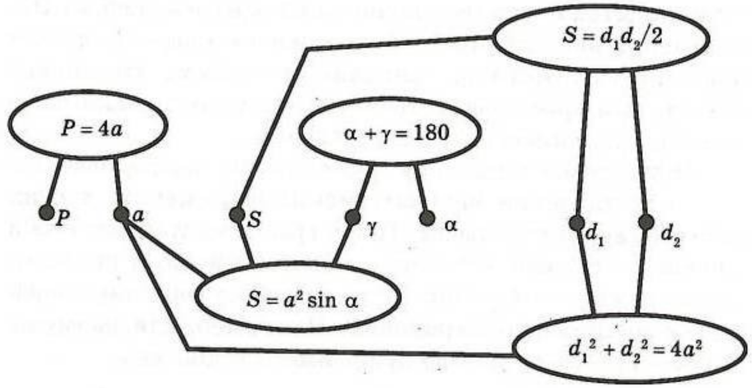
Последовательность выполнения операций определяется при прохождении дерева от листьев к корню (снизу вверх). Последней выполнится операция, отмеченная в корне.

6. В форме двудольного графа требуется получить модель знаний о геометрическом объекте — ромбе. Ромб имеет 7 характеристик: длину стороны a, острый угол α, тупой угол γ, площадь S, периметр P и диагонали d_1 и d_2. Эти величины связаны следующими формулами:

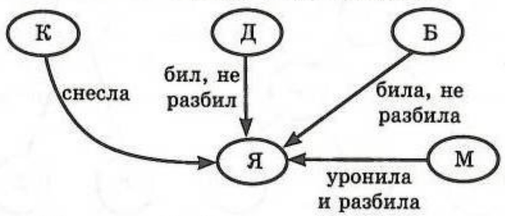
$$\alpha + \gamma = 180,\ P = 4a,\ S = a^2 \sin \alpha,$$

$$S = d_1 d_2 / 2,\ d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

Построим двудольный граф с семью черными вершинами (a, α, γ, S, P, d_1, d_2) и пятью белыми (для каждой из пяти формул).



7. Определите сказку, для которой следующий граф отражает отношения между персонажами:



Ответ: Курочка Ряба.

Задания для самостоятельной работы

№ 97.

Постройте граф (семантическую сеть), отражающий следующую информацию:

Мария работает в дневную смену. Сергей работает в вечернюю смену. Борис работает в вечернюю смену. Валентина работает в вечернюю смену. Два служащих знают друг друга, если они работают в одну смену.

Определите:
1) Знает ли Сергей Бориса?
2) Кого знает Валентина?
3) Кого знает Мария?

№ 98.

Будем считать, что система «Школьный урок» состоит из следующих элементов: ученик, учитель, учебник, тетрадь, классный журнал, классная доска, мел, парта, учительский стол, классная комната. Постройте граф, в котором вершинами будут перечисленные объекты, а дугами — отношения между ними.

№ 99.

Будем считать, что система «Поликлиника» состоит из следующих элементов: направление к врачу, врач, медсестра, кабинет, санитарка, медицинские инструменты, карточка больного, деньги, регистратура. Постройте граф, в котором вершинами будут перечисленные объекты, а дугами — отношения между ними.

№ 100.

Будем считать, что круговорот воды в природе обеспечивается взаимодействием следующих объектов: водоемов (моря, океаны, озера, пруды и пр.), рек, подземных вод, атмосферы, облаков, почвы, растений.

Постройте граф круговорота воды в природе, в котором вершинами являются перечисленные объекты, а дугами — их взаимодействия, которые обеспечивают движение воды.

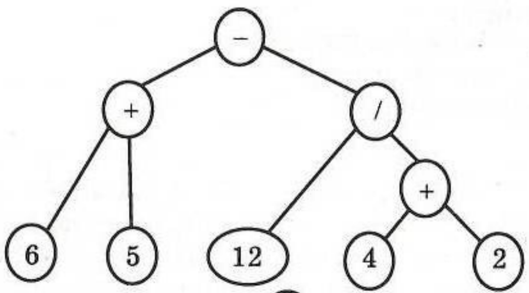
№ 101.

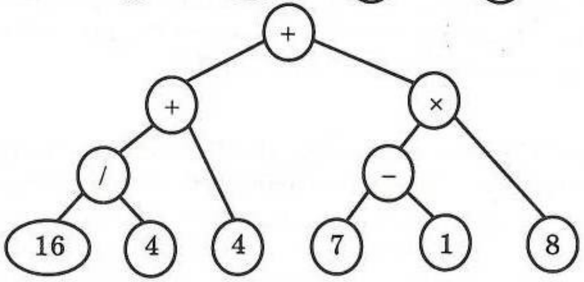
Постройте деревья для следующих арифметических выражений:

1) $7 - 3 \cdot 5 + 20/4$;
2) $6 \cdot 4 + 7 \cdot (9 - 1)$;
3) $(2 + 8) \cdot (4 + 6) \cdot 7$.

№ 102.

Запишите арифметические выражения, соответствующие следующим деревьям:

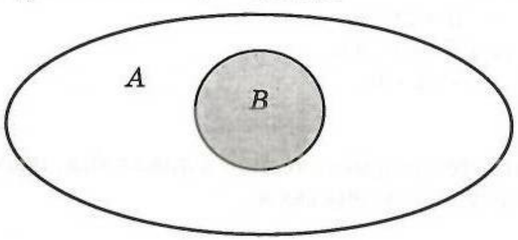
1) 

2) 

№ 103.

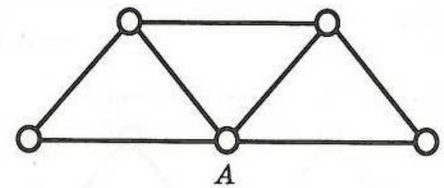
Выполните тестовые задания.

1. Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным:
   1) Множество целых чисел является подмножеством множества действительных чисел.
   2) Отрезок [1; 12] является подмножеством промежутка (1; 10].
   3) Множество рациональных чисел является подмножеством множества иррациональных чисел.
   4) Интервал (–4; 0) является подмножеством отрезка [–3; –1].
2. Даны два множества — A и B.



Серым цветом выделено:
1) пересечение множеств A и B;
2) объединение множеств A и B;
3) разность множеств A и B;
4) дополнение множества B до множества A.

3. Укажите пару $(x;\ y)$, находящуюся в отношении $y = \cos x$.
   1) (0; 1); 2) (1; 0); 3) (0; –1); 4) (1; 1).
4. Степень вершины A равна:



   1) 4; 2) 5; 3) 3; 4) 0.
5. Расположите заданные множества в порядке возрастания количества их элементов:
   1) пустое множество;
   2) $\{x \in \mathrm{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$;
   3) $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$;
   4) множество целых чисел.
6. Даны множества: $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 12\}$, $B = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$.

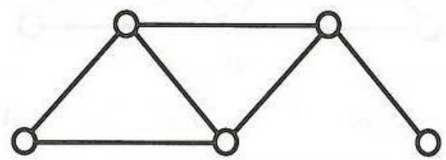
   Установите соответствие между следующими множествами и необходимыми для их получения операциями над множествами A и B:
   1. $\{2,\ 4,\ 8\}$
   2. $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$
   3. $\{1,\ 3,\ 12\}$

   1) пересечение множеств A и B;
   2) объединение множеств A и B;
   3) разность множеств A и B.
7. Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным:
   1) Множество целых чисел является подмножеством множества рациональных чисел.

2) Число 0 принадлежит множеству натуральных чисел.
3) Множество натуральных чисел является подмножеством множества иррациональных чисел.
4) Множество комплексных чисел является подмножеством множества действительных чисел.

8. Даны два множества: $A = \{3, 5, 10, 21\}$, $B = \{-5, 0, 10, 12\}$. Их пересечением является:
1) пустое множество;
2) $\{-5, 0, 3, 5, 10, 12, 21\}$;
3) число 10;
4) число 0.

9. Изображенный граф можно назвать:



1) неориентированным;
2) мультиграфом;
3) пустым графом;
4) двудольным.

10. Выберите бинарное отношение $(x; y)$, принадлежащее множеству решений уравнения $y = \ln x$:
1) (0; 1); 2) (1; 0); 3) (0; –1); 4) (1; 1).

Вопросы по теме

1. *Что такое граф?*
2. *Перечислите характеристические элементы графа и дайте им определение.*
3. *Какие структуры графа вам известны? Чем они отличаются друг от друга?*
4. *Дайте определения разным видам графа: простой, пустой, ориентированный, неориентированный, мультиграф, двудольный.*

5. *Поясните выражения: инцидентные ребра, смежные вершины, кратные ребра, степень вершины графа, петля графа, дуга графа, дерево графа.*

Тема 3.3. Элементы математической логики. Булева алгебра

Термины

- Высказывание
- Виды высказываний
- Конъюнкция
- Дизъюнкция
- Инверсия
- Таблица истинности

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Элементы математической логики

Логика — наука о формах и способах мышления, способах доказательств и опровержений. Элементы логики используются в теоремах теории вероятности, поэтому необходимо знать базовые понятия этой науки. Все положения логики основываются на понятиях, высказываниях и умозаключениях.

Понятие — определение чего-либо, указывающее его существенные признаки.

Утверждение — суждение, которое требуется доказать или опровергнуть.

Высказывание (суждение) — утверждение, для которого имеет смысл говорить, истинно оно или ложно. С высказываниями можно выполнять определенные действия, изучаемые в разделе логики — алгебре высказываний, в результате получаются новые, составные высказывания.

Рассуждение — цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом.

Умозаключение — логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение. Умозаключения бывают индуктивные, дедуктивные и по аналогии. Рассуждения и умозаключения чаще всего используются при доказательстве теорем в математике, выполнении преобразований выражений, решении задач.

Для выполнения действий с логическими выражениями в математической логике создана алгебра высказываний (алгебра логики). Поскольку основы такой алгебры были заложены в трудах английского математика Джорджа Буля (XIX в.), то алгебра логики получила также название булевой алгебры.

Логические выражения бывают простыми и сложными, будем их обозначать заглавными латинскими буквами. Логические выражения принимают значения 0 или 1.

Например, A = «$2 \cdot 2 = 4$» — истинное высказывание, значит, A равно 1.

B = «$2 \cdot 2 = 5$» — ложное высказывание, значит, B равно 0.

Рассмотрим три основных действия с высказываниями.

1. Отрицание.

Простейшей логической операцией над высказываниями является отрицание (инверсия), соответствующее в обычном языке частице «не». Выполнение операции отрицания над высказыванием A обозначается $\bar{A}$ и читается: «не A». Отрицанием высказывания называется такое высказывание $\bar{A}$, которое истинно, если данное высказывание ложно, и ложно, если данное высказывание истинно. Инверсия обозначается верхней черточкой, $\neg$, НЕ, *NOT*.

Значения логического действия записываются в таблицу истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Здесь 1 — истинное высказывание, 0 — ложное.

2. Конъюнкция.

Сложное высказывание может быть составлено из простых с помощью союза «и». Пусть имеются два высказывания A и B. Высказывание, которое истинно в том и только в том случае, когда оба высказывания A и B истинны, называется конъюнкцией высказывания. (Конъюнкция в переводе с латинского означает «союз, связь».) Конъюнкцию называют логическим умножением и обозначают $\wedge$, &, *AND*, И, *. Значение конъюнкции двух выражений представлено в таблице истинности:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Дизъюнкция.

Высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний A и B, называется дизъюнкцией высказывания. (Дизъюнкция в переводе с латинского означает «разобщение, различие».) Дизъюнкцию называют логическим сложением и обозначают $\vee$, *OR*, ИЛИ, +. Значение дизъюнкции двух выражений представлено в таблице истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Задания для самостоятельной работы

№ 104.

Заполните таблицу истинности для выражения $Z = \bar{A} \wedge (B \vee C)$.

Решение:

A	B	C	$\overline{A}$	$B \vee C$	$\overline{A} \wedge (B \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

№ 105.

Заполните таблицу истинности:

а)

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$

б)

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$

в)

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$

г)

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$

№ 106.

Составьте таблицы истинности для логических выражений:

1) $Z = (A \wedge B) \vee \overline{C}$;

2) $Z = (\overline{A} \wedge B) \vee C$;

3) $Z = \overline{A \wedge B} \vee (A \wedge B)$;

4) $Z = (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B)$;

5) $Z = \overline{A \wedge B} \wedge (A \vee B)$.

Вопросы по теме

1. *Дайте определения базовым понятиям логики: определения, высказывания (суждения), умозаключения.*
2. *Перечислите основные действия алгебры высказываний (конъюнкция, дизъюнкция, инверсия) и дайте им определения.*
3. *Почему в алгебре высказываний используют двоичную систему счисления?*
4. *Что такое таблица истинности?*
5. *Каким образом записывается логическое выражение?*

Исторические сведения к разделу 3

Основные понятия комбинаторики

Классические дискретные задачи — это задачи выбора и расположения элементов конечного множества, имеющие в качестве исходной некоторую формулировку развлекательного содержания типа головоломок.

До XIX в. математиками рассматривались в основном конечные множества.

Основы теории конечных и бесконечных множеств были заложены Бернардом Больцано, который сформулировал некоторые из ее принципов.

С 1872 по 1897 г. (главным образом в 1872–1884 гг.) Георг Кантор опубликовал ряд работ, в которых были систематически изложены основные разделы теории множеств, включая теорию точечных множеств и теорию трансфинитных чисел (кардинальных и порядковых). В этих работах он не только ввел основные понятия теории множеств, но и обогатил математику рассуждениями нового типа, которые применил для доказательства теорем теории множеств, в частности впервые к бесконечным множествам. Поэтому общепризнано, что теорию множеств создал Г. Кантор.

В частности, Г. Кантор определил множество как «единое имя для совокупности всех объектов, обладающих данным свойством». Эти объекты назвал элементами множества. Множество объектов, обладающих свойством $A(x)$, обозначил $\left\{x \middle| A(x)\right\}$. Если некоторое множество $Y = \left\{x \middle| A(x)\right\}$, то $A(x)$ назвал характеристическим свойством множества Y.

Так как теория множеств фактически используется как основание и язык всех современных математических теорий, в 1908 г. теория множеств была аксиоматизирована независимо Бертраном Расселем и Эрнстом Цермело. В дальнейшем многие исследователи пересматривали и изменяли обе системы, в основном сохранив их характер. До сих пор они все еще известны как теория типов Рассела и теория множеств Цермело. В настоящее время теорию множеств Кантора принято называть *наивной теорией множеств*, а вновь построенную — *аксиоматической теорией множеств*.

На сегодняшний день множество определяется как модель, удовлетворяющая аксиомам Цермело — Френкеля с аксиомой выбора. При таком подходе в некоторых математических теориях возникают совокупности объектов, которые не являются множествами. Такие совокупности называются классами (различных порядков).

Другая часть дискретной математики — комбинаторика (ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов) — возникла в XVII в. Долгое время казалось, что комбинаторика лежит вне основного русла развития математики и ее приложений. Положение дел резко изменилось после появления быстродействующих

вычислительных машин и связанного с этим расцвета конечной математики. Сейчас комбинаторные методы применяются в теории случайных процессов, статистике, математическом программировании, вычислительной математике, планировании экспериментов и т.д. В математике комбинаторика используется при изучении конечных геометрий, комбинаторной геометрии, теории представлений групп, неассоциативных алгебр и т.д.

На русском языке есть несколько книг, посвященных комбинаторике: «Комбинаторика» М. Холла (М., 1970), «Введение в комбинаторный анализ» Дж. Риордана (М., 1963), «Прикладная комбинаторная математика» (М., 1968). Отдельным вопросам комбинаторики посвящены книги А.А. Зыкова «Теория конечных графов» (Новосибирск, 1969), Ф. Харари «Теория графов» (М., 1973), Т. Саати «Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы» (М., 1973) и др. Однако все эти книги предъявляют высокие требования к математической подготовке читателя. Популярные же книги обычно охватывают лишь немногие начальные сведения.

В 1969 г. была сделана попытка популярно изложить некоторые вопросы комбинаторики («Комбинаторика». М., 1969). В основном книга была посвящена вопросам перечислений. Такие важные разделы, как теоремы о различных и общих представителях, теорема Рамсея, метод Пойя перечисления орбит и т.д., остались вне рамок книги. Поэтому возникла необходимость написать новую книгу, в которой наряду с вопросами перечислительной комбинаторики освещались бы и иные стороны этой науки.

Комбинаторика (комбинаторный анализ) — раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисление элементов) и отношения на них (например, частичного порядка). Комбинаторика связана со многими другими областями математики — алгеброй, геометрией, теорией вероятностей и имеет широкий спектр применения, например в информатике и статистической физике.

Термин «комбинаторика» был введен в математический обиход Лейбницем, который в 1666 г. опубликовал свой труд «Рассуждения о комбинаторном искусстве».

Иногда под комбинаторикой понимают более обширный раздел дискретной математики, включающий, в частности, теорию графов.

Комбинаторика занимается различного вида соединениями, которые можно образовать из элементов конечного множества. Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во II в. до н. э. Индийцы умели вычислять числа, которые сейчас называют «сочетаниями». В XII в. Бхаскара вычислял некоторые виды сочетаний и перестановок. Предполагают, что индийские ученые изучали соединения в связи с применением их в поэтике, науке о структуре стиха и поэтических произведениях. Например, в связи с подсчетом возможных сочетаний ударных (долгих) и безударных (кратких) слогов стопы из n слогов. Как научная дисциплина комбинаторика сформировалась в XVII в. В книге «Теория и практика арифметики» (1656 г.) французский автор А. Также посвящает сочетаниям и перестановкам целую главу.

Б. Паскаль в «Трактате об арифметическом треугольнике» и «Трактате о числовых порядках» (1665 г.) изложил учение о биномиальных коэффициентах.

П. Ферма знал о связях математических квадратов и фигурных чисел с теорией соединений. Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования Лейбницем в 1665 г. работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в которой впервые дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок. Изучением размещений впервые занимался Я. Бернулли во второй части своей книги «Ars conjectandi» («Искусство предугадывания») в 1713 г. Современная символика сочетаний была предложена разными авторами учебных руководств только в XIX в.

Все разнообразие комбинаторных формул может быть выведено из двух основных утверждений, касающихся конечных множеств — правило суммы и правило произведения.

Правило суммы: если конечные множества не пересекаются, то число элементов $X \cup Y$ {или} равно сумме числа элементов множества X и числа элементов множества Y.

То есть, если на первой полке стоит X книг, а на второй Y, то выбрать книгу из первой или второй полки можно $X + Y$ способами.

Рассмотрим пример задачи.

Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?

Решение: $X = 17$, $Y = 13$. По правилу суммы $X \cup Y = 17 + 13 = 30$ способами.

Другой пример. Имеется 5 билетов денежно-вещевой лотереи, 6 билетов спортлото и 10 билетов автомотолотереи. Сколькими способами можно выбрать один билет из спортлото или автомотолотереи?

Решение: так как денежно-вещевая лотерея в выборе не участвует, то всего $6 + 10 = 16$ вариантов.

Правило произведения: если элемент X можно выбрать k способами, а элемент Y — m способами, то пару (X, Y) можно выбрать $k \cdot m$ способами.

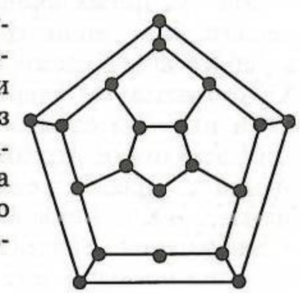
То есть, если на первой полке стоит 5 книг, а на второй 10, то выбрать одну книгу с первой полки и одну со второй можно $5 \cdot 10 = 50$ способами.

Еще один пример.

Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Решение: имеется 12 книг и 3 цвета, значит, по правилу произведения возможно $12 \cdot 3 = 36$ вариантов переплета.

Основные понятия теории графов



В 1859 г. У. Гамильтон придумал игру «Кругосветное путешествие», состоящую в отыскании такого пути, проходящего через все вершины (города, пункты назначения) графа, изображенного на рисунке, чтобы посетить каждую вершину однократно и возвратиться в исходную. Пути, обладающие таким свойством, называются гамильтоновыми циклами.

Задача о гамильтоновых циклах в графе получила различные обобщения. Одно из этих обобщений — задача коммивояжера, имеющая ряд применений в исследовании операций, в частности, при решении некоторых транспортных проблем.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась двести с лишним лет назад именно в ходе решения головоломок. Очень долго она находилась в стороне от главных направлений исследований ученых, была в царстве математики на положении Золушки, чьи дарования раскрылись в полной мере лишь тогда, когда она оказалась в центре общего внимания.

Первая работа по теории графов, принадлежащая известному швейцарскому математику Л. Эйлеру, появилась в 1736 г. Большой вклад в систематическое развитие дискретных методов был сделан Г. Лейбницем (диссертация «Комбинаторное искусство»), Я. Бернулли (работа «Искусство предположений»), Л. Эйлером. Можно считать, что с появлением работ Я. Бернулли и Г. Лейбница комбинаторные методы выделились в самостоятельную часть математики. В работах Л. Эйлера по разбиениям и композициям натуральных чисел на слагаемые было положено начало одному из основных методов перечисления комбинаторных конфигураций — методу производящих функций.

Толчок к развитию теория графов получила на рубеже XIX и XX столетий, когда резко возросло число работ в области топологии и комбинаторики, с которыми ее связывают самые тесные узы родства. Графы стали использоваться при построении схем электрических цепей и молекулярных схем. Как отдельная математическая дисциплина теория графов была впервые представлена в работе венгерского математика Д. Кенига в 30-е гг. XX столетия. Он впервые ввел термин «граф». Графами были названы схемы, состоящие из точек и соединяющих эти точки отрезков прямых или кривых. Возвращение интереса к комбинаторному анализу относится к 50-м гг. XX в. в связи с бурным развитием кибернетики и дискретной математики и широким использованием электронно-вычислительной техники. В этот период

активизировался интерес к классическим дискретным задачам.

В последнее время графы и связанные с ними методы исследований органически пронизывают на разных уровнях едва ли не всю современную математику. Теория графов рассматривается как одна из ветвей топологии; непосредственное отношение она имеет также к алгебре и теории чисел. Графы эффективно используются в теории планирования и управления, теории расписаний, социологии, математической лингвистике, экономике, биологии, медицине, географии. Широкое применение находят графы в таких областях, как программирование, теория конечных автоматов, электроника, в решении вероятностных и комбинаторных задач, нахождении максимального потока в сети, кратчайшего расстояния, максимального паросочетания, проверки планарности графа и др. Как особый класс можно выделить задачи оптимизации на графах. Математические развлечения и головоломки тоже являются частью теории графов. Теория графов быстро развивается, находит все новые приложения и ждет молодых исследователей.

Родоначальником теории графов принято считать математика Л. Эйлера. Историю возникновения этой теории можно проследить по переписке великого ученого. Вот перевод латинского текста, который взят из письма Эйлера к итальянскому математику и инженеру Маринони, отправленного из Петербурга 13 марта 1736 года: «Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинуто семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь непрерывно обойти их, проходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто еще до сих пор не мог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство... После долгих размышлений я нашел легкое правило, основанное на вполне убедительном доказательстве, с помощью которого можно во всех задачах такого рода тотчас же определить, может ли быть совершен такой обход через какое угодно число и как угодно расположенных мостов или не может. Кенигсбергские же мосты расположены так, что их можно представить на следующем рисунке, на котором A и D обозначены острова, а B и C — части континента, отделенные друг от друга рукавами реки. Семь мостов обозначены буквами a, b, c, d, e, f, g».

Семь мостов Кенигсберга — один из первых результатов в теории графов, опубликован Эйлером в 1736 г.

В XVI в. через реку Прегель, протекавшую по городу Кенигсберг (Калининград), было построено 7 мостов, которые связывали ее берега с двумя островами, расположенными в черте города. Рассказывают, что однажды один из жителей города спросил у своего соседа, сможет ли он пройти по всем мостам так, чтобы на каждом из них побывать лишь один раз и вернуться к тому месту, откуда начал прогулку. Этой задачей заинтересовались многие, однако решить ее никто из жителей города так и не смог.

В дальнейшем задача привлекала внимание ученых разных стран. Решить ее удалось в 1736 г. известному швейцарскому математику Л. Эйлеру. Эту дату можно считать годом зарождения теории графов. Он разработал формализацию этой задачи и доказал, что она не имеет решения, а также сумел найти общий метод решения подобных задач.

Решая задачу о семи мостах, Эйлер поступил следующим образом. Точками B и C он изобразил берега реки, точками A и D — острова, а линиями — мосты. В результате получилась фигура, изображенная на рисунке. Такую фигуру называют графом, точки A, B, C, D вершинами графа, а линии, соединяющие вершины, — ребрами графа.

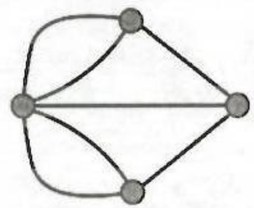
Эйлер подсчитал число дуг, исходящих из каждой вершины графа. Из вершин B, C, D исходит по три дуги, а из вершины A — пять дуг. Вершины графа, из которых выходит нечетное число дуг, он назвал нечетными, а вершины, из которых исходит четное число дуг, — четными. Как видно, все вершины данного графа оказались нечетными.

На упрощенной схеме части города (графе) мостам соответствуют линии (ребра графа), а частям города — точки соединения линий (вершины графа). В ходе рассуждений Эйлер пришел к следующим выводам:

- Число нечетных вершин (вершин, к которым ведет нечетное число ребер) графа должно быть четно. Не может существовать граф, который имел бы нечетное число нечетных вершин.

- Если все вершины графа четные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.
- Граф с более чем двумя нечетными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

Граф кенигсбергских мостов имел четыре нечетные вершины (т.е. все), следовательно, невозможно пройти по всем мостам, не проходя ни по одному из них дважды. Его можно изобразить следующим образом:



По поводу обнаруженного им способа решать задачи подобного рода Эйлер писал: «Это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, каким образом получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими».

Так можно ли обойти кенигсбергские мосты, проходя только один раз через каждый из этих мостов?

Обоснование вышеприведенного правила можно найти в письме Л. Эйлера к своему другу от 3 апреля того же года.

Математик писал, что переход возможен, если на участке разветвления реки имеется не более двух областей, в которые ведет нечетное число мостов. Для того чтобы проще представить себе это, будем стирать на рисунке уже пройденные мосты. Легко проверить, что если мы начнем двигаться в соответствии с правилами Эйлера, пересечем один мост и сотрем его, то на рисун-

ке будет изображен участок, где опять имеется не более двух областей, в которые ведет нечетное число мостов, а при наличии областей с нечетным числом мостов мы будем располагаться в одной из них. Продолжая двигаться так далее, пройдем через все мосты по одному разу. На карте старого Кенигсберга был еще один мост, появившийся чуть позже, и соединявший остров Ломзе с южной стороной. Своему появлению этот мост обязан самой задаче Эйлера—Канта. А произошло это вот как. Кайзер (император) Вильгельм славился своей прямотой, простотой мышления и солдатской «недалекостью». Однажды, находясь на светском рауте, он чуть не стал жертвой шутки, которую с ним решили сыграть ученые умы, присутствовавшие на приеме. Они показали кайзеру карту Кенигсберга и попросили попробовать решить эту знаменитую задачу, которая по определению была нерешаемой. Ко всеобщему удивлению, кайзер попросил перо и лист бумаги, сказав, что решит задачу за полторы минуты. Ошеломленный немецкий истеблишмент не мог поверить своим ушам, но бумагу и чернила быстро нашли. Кайзер положил листок на стол, взял перо и написал: «Приказываю построить восьмой мост на острове Ломзе». Так в Кенигсберге и появился новый мост, который так и назвали — Мост кайзера. А задачу с восемью мостами теперь мог решить даже ребенок.

Задача о кенигсбергских мостах и подобные ей задачи вместе с совокупностью методов их исследования составляют очень важный в практическом отношении раздел математики, называемый теорией графов. Кроме Эйлера над графами работали Д. Кениг (1774–1833), У. Гамильтон (1805–1865), из современных математиков — К. Берж, О. Оре, А. Зыков.

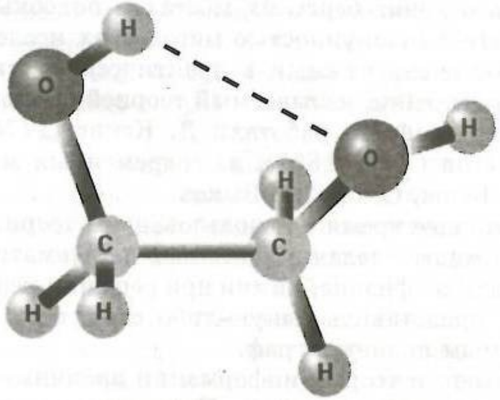
В настоящее время с использованием теории графов решаются многие задачи. Не только в математике, но и в информатике, физике, химии при решении необходимо наглядно представить какую-либо структуру, и здесь незаменимым является граф.

Например, в теории информации двоичные деревья играют весьма важную роль. Предположим, что определенное число сообщений требуется закодировать в виде конечных последовательностей различной длины, состоящих из нулей и единиц. Если вероятности кодовых слов заданы, то наилучшим считается код, в котором средняя длина слов минимальна по сравнению с прочими распределениями вероятности. Задачу о построении такого оптимального кода позволяет решить алгоритм Хаффмана.

Двоичные кодовые деревья допускают интерпретацию в рамках теории поиска. Каждой вершине при этом сопоставляется вопрос, ответить на который можно либо «да», либо «нет». Утвердительному и отрицательному ответу соответствуют два ребра, выходящие из вершины. «Опрос» завершается, когда удается установить то, что требовалось.

Таким образом, если кому-то понадобится взять интервью у различных людей и ответ на очередной вопрос будет зависеть от заранее неизвестного ответа на предыдущий вопрос, то план такого интервью можно представить в виде двоичного дерева.

Как известно, в химии структура молекул изображается в виде решетки — графа. Еще А. Кэли рассмотрел задачу о возможных структурах насыщенных (или предельных) углеводородов. Шотландский химик А. Браун в 1864 г. первым предложил использовать «графическую» нотацию для рисования молекул, которая быстро получила распространение и является сегодня общепринятой. Например, смотрите на рисунке молекулу:



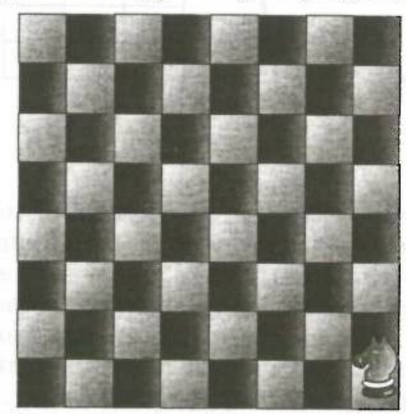
Деревья играют большую роль в биологической теории ветвящихся процессов. Для простоты мы рассмотрим только одну разновидность ветвящихся процессов — раз-

множение бактерий. Предположим, что через определенный промежуток времени каждая бактерия либо делится на две новые, либо погибает. Тогда для потомства одной бактерии мы получим двоичное дерево.

Нас будет интересовать лишь один вопрос: в скольких случаях n-е поколение одной бактерии насчитывает ровно k потомков? Рекуррентное соотношение, обозначающее число необходимых случаев, известно в биологии под названием процесса Гальтона—Ватсона. Его можно рассматривать как частный случай многих общих формул.

Еще недавно одной из наиболее сложных и утомительных задач для радиолюбителей было конструирование печатных схем. Печатной схемой называют пластинку из какого-либо диэлектрика (изолирующего материала), на которой в виде металлических полосок вытравлены дорожки. Пересекаться дорожки могут только в определенных точках, куда устанавливаются необходимые элементы (диоды, триоды, резисторы и др.), их пересечение в других местах вызовет замыкание электрической цепи. В ходе решения этой задачи необходимо вычертить плоский граф с вершинами в указанных точках.

С зарождением теории графов связана еще одна древняя задача — о шахматном коне, который должен пройти через все клетки доски, не побывав ни на одной дважды. Первая публикация, излагающая систематический подход к поиску решений задачи о шахматном коне, принадлежала перу Эйлера и увидела свет в 1766 г.



Между задачами о мостах Кенигсберга и шахматном коне есть принципиальное различие: в первой требуется единожды обойти все ребра графа, тогда как во второй требуется единожды посетить все вершины. Благодаря этому различию, исследования разных аспектов новой теории долгое время протекали независимо друг от друга.

Еще одна из наиболее известных задач — задача коммивояжера.

Она заключается в том, чтобы обойти все города по одному разу, пройдя минимальное расстояние. Приведем решение этой задачи. Города обозначим буквами A, B, C, D. Начало пути — точка A. Длины отрезков запишем в виде таблицы.

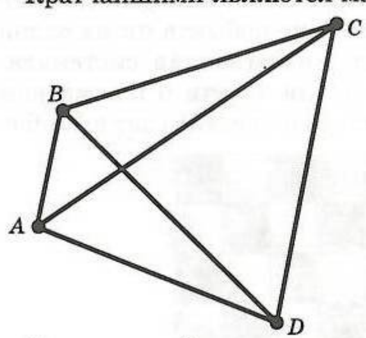
Схематически изобразим возможные маршруты. Возможных циклических маршрутов шесть: $ABCDA$, $ACDBA$, $ADBCA$, $ACBDA$, $ABDCA$, $ADCBA$. Но длины последних трех — повторение предыдущих. Вычислим длины отличных маршрутов:

$ABCDA = 11 + 6 + 10 + 17 = 44;$

$ACDBA = 13 + 10 + 9 + 11 = 43;$

$ADBCA = 17 + 9 + 6 + 13 = 45.$

Кратчайшими являются маршруты $ACDBA$ и $ABDCA$.



	A	B	C	D
A	0	11	13	17
B	11	0	6	9
C	13	6	0	10
D	17	9	10	0

Теория графов находит применение, например, в геоинформационных системах (ГИС). Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы и т.п. рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередачи и т. п. — как ребра. Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.

Итак, из всего вышесказанного неопровержимо следует практическая ценность теории множеств и теории графов.

Основы математической логики. Булева алгебра

Алгебра множеств является подразделом булевых алгебр, впервые возникших в трудах Джорджа Буля (1815–1864). Этот английский математик и логик является основоположником математической логики и алгебры логики, которую изложил в книге «Исследование законов мышления» (1854). Алгебра логики – система алгебраических методов решения логических задач и совокупность таких задач, в узком смысле – табличное, матричное построение логики высказываний, определяющее логические операции над ними. В аксиомах булевой алгебры отражена аналогия между понятиями «множества», «событие» и «высказывания». Логические высказывания можно записать с помощью множеств и проанализировать с помощью булевой алгебры.

РАЗДЕЛ 4

Основные понятия и методы теории вероятностей и математической статистики

Тема 4.1. Основы теории вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Термины

- Теория вероятности
- Вероятность
- Благоприятный исход
- Формула вероятности
- Случайное событие
- Достоверное событие
- Невозможное событие
- Несовместные события
- Противоположные события
- Равновероятные события
- Равновозможные события
- Зависимые события
- Независимые события
- Теорема сложения вероятностей
- Теорема умножения вероятностей
- Закон больших чисел

Исторические сведения

Фундамент теории вероятности заложили А. Муавр (1667–1754), Я. Бернулли (1654–1705), П. Лаплас (1749–1827) на основе отдельных достижений XVII–XVIII вв.

Первой публикацией по теории вероятностей в России была работа Д. Бернулли (1700–1782) «Опыт новой теории о мере жребия», опубликованная в 1738 г. в пятом томе «Записок Императорской Академии наук».

Первой российской диссертацией по теории вероятностей была магистерская диссертация П.Л. Чебышева (1821–1894) «Опыт элементарного анализа теории вероятностей», выполненная по предложению профессора Н.Д. Брашмана (1796–1866) на физико-математическом

факультете Московского университета в 1845 г. и защищенная в 1846 г.

А первый курс лекций по теории вероятностей в Московском университете был прочитан в 1850 г. профессором А.Ю. Давидовым (1823–1886).

В это же время в Санкт-Петербурге теорией вероятностей и математической статистикой занимаются академик М.В. Остроградский (1801–1861) и академик В.Я. Буняковский (1804–1889), который издает первый русский учебник «Основания математической теории вероятностей» (1846).

С 1847 г. П.Л. Чебышев начинает преподавать в Санкт-Петербургском университете. С 1860 г. к нему переходит от В.Я. Буняковского курс теории вероятностей, что стало дополнительным стимулом для его размышлений в этой области. Собственно, с этого времени и происходит зарождение «Петербургской школы» теории вероятностей, прославленной выдающимися работами академиков П.Л. Чебышева (1821–1894), А.А. Маркова (1856–1922), А.М. Ляпунова (1857–1918). Избранные труды этих ученых вышли в свет в серии «Классики науки и техники» Изд-ва АН СССР.

С 1907 по 1933 г. в Харькове работал академик С.Н. Бернштейн (1880–1968), который не только значительно продвинул исследования Петербургской школы по предельным теоремам теории вероятностей, но и занялся вопросами логического обоснования самой теории («Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей»).

Начало современного периода в развитии теории вероятностей в Московском университете было положено работами А.Я. Хинчина (1894–1959) по закону повторного логарифма (1923, 1924), Е.Е. Слуцкого (1880–1948) по теории случайных функций (1925) и работой А.Я. Хинчина и А.Н. Колмогорова (1903–1987) «О сходимости рядов, члены которых определяются случаем», опубликованной в 1925 г. (на немецком языке). В 1926 г. А.Я. Хинчин прочитал первый в истории Московского университета специальный курс по теории вероятностей, слушателями которого были А.Н. Колмогоров, Н.В. Смирнов (1900–1966), В.И. Гливенко (1897–1940).

Теоретико-множественный подход к проблемам теории вероятностей, зародившийся в недрах Лузинской математической школы и с успехом примененный А.Я. Хинчиным и А.Н. Колмогоровым, оказался столь плодотворным, что, по существу, именно на нем и основана вся современная теория вероятностей.

В 1933 г. в Московском университете организуется механико-математический факультет, в составе которого в 1935 г. была образована кафедра теории вероятностей, ставшая одним из основных центров по подготовке специалистов и научным исследованиям в области теории вероятностей и математической статистики в нашей стране. Многие поколения советских и российских ученых в этой области науки считают себя непосредственными питомцами этой кафедры. Первый заведующий кафедрой А.Н. Колмогоров руководил кафедрой с 1935 по 1966 г., с 1966 по 1995 г. ею заведовал Б.В. Гнеденко (1912–1995). В сентябре 1996 г. заведующим кафедрой теории вероятностей избран А.Н. Ширяев (род. 1934 г.).

Об основных научных достижениях Московской школы теории вероятностей и кафедры теории вероятностей Московского университета имеется достаточное число публикаций обзорного характера, в которых можно найти детальное изложение многих научных результатов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Классическое определение вероятности

Теория вероятностей — раздел математики, в котором по данным вероятностям одних случайных событий находят вероятности других событий, связанных количественным образом с первыми. Теория вероятностей изучает также случайные величины и случайные процессы. Одна из основных задач теории вероятности состоит в выяснении закономерностей, возникающих при взаимо-

действии большого числа случайных факторов. Математический аппарат теории вероятности используется при изучении массовых явлений в науке и технике. Методы теории вероятности играют важную роль при обработке статистических данных.

Теория вероятности — наука, изучающая законы, управляющие случайными явлениями.

Примеры случайных явлений:

— бросаем монету, нельзя утверждать, как она упадет: гербом или решкой;

— вынимаем карту из колоды, нельзя сказать, какой она будет масти;

— количество забракованных изделий ОТК на заводе.

Эти примеры относятся к области случайных явлений. **Случайным** событием (или просто «событием») называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Например, в опыте «бросание монеты» может произойти (а может и не произойти) событие А — «выражение герба».

Теория вероятности позволяет нам измерять количественно степень «правдоподобия» (или вероятности) различных событий. Ясно, что не все случайные события одинаково вероятны, что среди них бывают более или менее вероятные. Например, опыт «бросание игральной кости». Какое событие в этом опыте более вероятно?

А — «выпадение шести очков»;

В — «выпадение четного числа очков».

Событие может быть маловероятным, но возможным. Например, в книге 500 страниц, на какой-либо из них напечатана формула. Раскрыв книгу наугад, маловероятно, что мы наткнемся на формулу.

Вероятность — количественная оценка возможности появления данного случайного события. Вероятность возникновения случайного события есть отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов.

$P = \dfrac{m}{n}$, где P — вероятность данного случайного события, m — количество благоприятных исходов для данного события, n — общее число исходов для данного события. Эту формулу называют классическим определением вероятности.

Однако это определение весьма неполно, что может подтвердить простой пример.

Давайте посчитаем вероятность того, что при бросании двух игральных костей по крайней мере на одной выпадет 6. Очевидно, что каждая кость может выпасть шестью различными способами. Число всех возможных случаев равно $6 \cdot 6 = 36$; число благоприятствующих случаев равно 11 (6–1, 6–2, 6–3, 6–4, 6–5, 6–6, 5–6, 4–6, 3–6, 2–6, 1–6). Таким образом, вероятность равна 11/36. Мы знаем, что это правильное решение.

Но ведь можно рассуждать и по-другому. Числа очков, выпавшие на обеих костях, могут образовать $6 \cdot 7/2 = 21$ различных комбинаций. 6 из них благоприятствующие (6–6, 6–5, 6–4, 6–3, 6–2, 6–1). Вероятность равна 6/21. Этот результат явно отличается от предыдущего. Однако, пользуясь нашим определением, мы не сможем найти ошибку.

Таким образом, придется дополнить определение: вероятность — это отношение числа случаев, благоприятствующих изучаемому событию, к полному числу возможных случаев, при условии, что эти случаи равновероятны.

Единица измерения в теории вероятности — вероятность достоверного события.

Достоверным называется такое событие, которое в данном опыте непременно произойдет. Например, «выпадение не более шести очков при бросании игральной кости» — достоверное событие.

Невозможным называется событие, которое в данном опыте вовсе не может произойти. Например, «выпадение отрицательного числа очков при бросании игральной кости».

Вероятность достоверного события = 1, вероятность невозможного события = 0.

Вероятность случайного события A обозначается $P(A)$, значит, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Вероятность любого события A может быть подсчитана как отношение числа случаев, благоприятных событию A, к общему числу случаев.

$P(A) = m_A/n$, где n — общее число случаев; m_A — число случаев, благоприятных событию A (обеспечивающих его появление).

Рассмотрим пример.

В ящике — 20 шаров, из них 9 зеленых, 6 красных и 5 черных. Какова вероятность взять наугад красный шар?

Решение:

Событие A заключается в том, что взятый произвольно шар красного цвета.

$$P_A = m_A/n = 6/20 = 3/10 = 0{,}3 = 30\%.$$

Ответы можно записывать по-разному: в виде обыкновенной дроби, в виде десятичной дроби, количеством процентов.

Пусть производится опыт, который имеет ряд возможных исходов $A_1, A_2, ..., A_n$.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **несовместными**, если они взаимно исключают друг друга, т.е. не могут появиться вместе.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называют **равновозможными**, если условия опыта обеспечивают одинаковую возможность (вероятность) появления каждого из них.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют **полную группу**, если они исчерпывают собой все возможные исходы, т.е. не может быть так, чтобы в результате опыта ни одно из них не произошло.

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ обладают всеми тремя свойствами, т.е. а) несовместны; б) образуют полную группу и в) равновозможны, то они называются **случаями**, а про опыт говорят, что он сводится к схеме случаев.

Два события A и B называют **независимыми**, если появление одного из них никак не влияет на появление другого, т.е. условная вероятность события A в предположении, что B произошло, совершенно такая же, как и без этого предположения: $P(A/B) = P(A)$.

В противном случае события A и B называются **зависимыми**.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. Теорема сложения вероятностей.

Вероятность того, что произойдет одно из двух несовместных событий (все равно, какое именно), равна сумме вероятностей этих событий.

Запишем это правило в виде формулы. Пусть A и B — два несовместных события. Тогда

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B).$$

Это правило обобщается на любое число событий.

Рассмотрим пример.

В ящике — 20 шаров, из них 9 зеленых, 6 красных и 5 черных. Какова вероятность взять наугад красный или зеленый шар?

Решение:

Событие A заключается в том, что взятый произвольно шар красного цвета.

Событие B заключается в том, что взятый произвольно шар зеленого цвета.

$$P_A = m_A/n = 6/20;$$

$$P_B = m_B/n = 9/20;$$

$$P = 6/20 + 9/20 = 15/20 = 3/4 = 0{,}75 = 75\%.$$

Ответ: 75%.

Вероятность может быть записана в виде обыкновенной дроби, в виде десятичной дроби или в процентах.

Из теоремы сложения вероятностей вытекают некоторые важные следствия:

1) Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна 1.
2) Если A — какое-то событие, а $\bar{A}$ — противоположное ему (состоящее в непоявлении A), то $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, т.е. сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

На последней формуле основан очень распространенный в теории вероятности прием «перехода к противоположному событию». Часто бывает, что вероятность интересующего нас события A вычислить трудно, а

вероятность противоположного ему — $\bar{A}$ — легко. Тогда вычисляют $P(\bar{A})$ и вычитают его из единицы:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

2. Теорема умножения вероятностей.

Вероятность совмещения двух событий (т.е. совместного появления того и другого) равна вероятности одного из них, умноженной на вероятность другого, вычисленную при условии, что первое произошло.

В виде формулы это правило запишется так:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A),$$

где $P(B/A)$ — так называемая условная вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A произошло.

При использовании правила умножения вероятностей совершенно все равно, какое из событий считать «первым», а какое «вторым». Правило умножения можно записать в виде

$$P(A \text{ и } B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Рассмотрим пример.

Бросили два игральных кубика. Какова вероятность появления двух пятерок?

Решение:

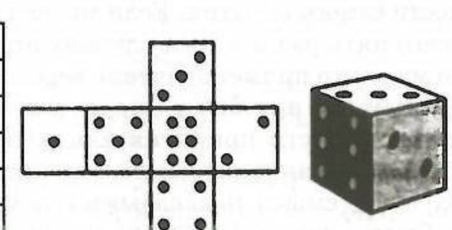
1-й способ. Рассмотрим два события: событие A — на первом кубике выпала 5, событие B — на втором кубике — тоже 5.

$$P_A = 1/6,\ P_B = 1/6.$$

$$P_{A\text{и}B} = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36.$$

2-й способ. Рассмотрим все возможные исходы при бросании двух игральных кубиков.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66



Из таблицы видно, что общее число исходов равно 36. Благоприятный исход для нашего случайного события — 1. Значит, вероятность $P = 1/36$.

Ответ: 1/36.

Закон больших чисел

Основным «показателем» любого события (факта) A является численная величина его вероятности $P(A)$, которая может принимать значения в диапазоне [0...1] — в зависимости от того, насколько это событие случайно. Такое смысловое определение вероятности не дает, однако, возможности указать путь для вычисления ее значения.

Поэтому необходимо иметь и другое, отвечающее требованиям практической работы определение термина «вероятность». Это определение можно дать на основании житейского опыта и обычного здравого смысла.

Если мы интересуемся событием A, то скорее всего можем наблюдать, фиксировать факты его появления. Потребность в понятии вероятности и ее вычисления возникнет, очевидно, только тогда, когда мы наблюдаем это событие не каждый раз, либо осознаем, что оно может произойти, а может не произойти. И в том и другом случае полезно использовать понятие частоты появления события f_A — как отношения числа случаев его появления (благоприятных исходов или частостей) к общему числу наблюдений.

Интуиция подсказывает, что частота наступления случайного события зависит не только от степени случайности самого события. Если мы наблюдали за событием A всего пять раз и в трех случаях это событие произошло, то мало кто примет значение вероятности такого события равным 0,6 или 60%. Скорее всего, особенно в случаях необходимости принятия каких-то важных, дорогостоящих решений, любой из нас продолжит наблюдения. Здравый смысл подсказывает нам, что уж если в 100 наблюдениях событие A произошло 14 раз, то мы можем с куда большей уверенностью полагать его вероятность равной 14%.

Таким образом, мы сформулировали второе определение понятия вероятности события — как предела, к которому стремится частота наблюдения за событием при непрерывном увеличении числа наблюдений. Теория вероятностей, специальный раздел математики, доказывает существование такого предела и сходимость частоты к вероятности при стремлении числа наблюдений к бесконечности. Это положение носит название центральной предельной теоремы, или **закона больших чисел**.

Другое название закона больших чисел — теорема Я. Бернулли. Она устанавливает, что при неограниченном увеличении числа испытаний частота случайного события сходится по вероятности к вероятности события. Эта теорема была выведена первой для этого закона. Позднее во многих практических задачах теории вероятностей стали использовать теорему Чебышева: при достаточно большом числе независимых испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию (понятие математического ожидания будет рассмотрено далее).

Чтобы использовать эту теорему, необходимо проводить эксперимент и регистрировать частоту наблюдений, которая тем точнее даст нам вероятность, чем больше наблюдений проведено.

Ну, а как быть, если эксперимент невозможен (дорог, опасен или меняет суть процессов, которые нас интересуют)? Иными словами, нет ли другого пути вычисления вероятности событий без проведения экспериментов?

Такой путь есть, хотя, как ни парадоксально, он все равно основан на опыте, опыте жизни, опыте логических рассуждений. Вряд ли кто-либо будет производить эксперименты, подбрасывая несколько сотен или тысячу раз симметричную монетку, чтобы выяснить вероятность появления герба при одном бросании. Или вычислять вероятность выпадения числа 5 на игральном кубике и т.д.

Этот путь называется статистическим моделированием — использованием схемы случайных событий и с успехом используется во многих приложениях теоретической и прикладной статистики. Продемонстрируем этот путь, рассматривая вопрос о вероятностях случайных величин. Обозначим $P(\bar{A})$ величину вероятности того, что событие A не произойдет. Тогда из определения вероятности через частоту наступления события следует, что $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, что правильно читать так — вероятность того, что событие произойдет или не произойдет, равна 100%, поскольку третьего варианта попросту нет.

Подобные логические рассуждения приведут нас к более общей формуле сложения вероятностей. Пусть некоторое случайное событие может произойти только в одном из 3 вариантов, т.е. пусть имеется система из трех несовместимых событий A, B и C.

Тогда очевидно, что

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1;$$

и столь же простые рассуждения приведут к выражению для вероятности наступления одного из двух несовместимых событий (например, A или B):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B);$$

или одного из трех:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C); \text{ и т.д.}$$

Рассмотрим чуть более сложный пример. Пусть нам надо найти вероятность события C, заключающегося в том, что при подбрасывании двух разных монет мы получим герб на первой (событие A) и на второй (событие B) стороне. Здесь речь идет о совместном наступлении двух независимых событий, т.е. нас интересует вероятность $P(C) = P(A \cap B)$.

И здесь метод построения схемы событий оказывается чудесным помощником — можно достаточно просто доказать, что

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Конечно же, рассматриваемые формулы годятся для любого количества событий: лишь бы они были несовместными в первом случае и независимыми во втором.

Наконец, возникают ситуации, когда случайные события оказываются взаимно зависимыми. В этих случаях приходится различать условные вероятности:

$P(A/B)$ — вероятность A при условии, что B уже произошло;

$P(A/\bar{B})$ — вероятность A при условии, что B не произошло,

называя $P(A)$ безусловной или полной вероятностью события A.

$$P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A).$$

Это весьма важное средство анализа, особенно в области проверки гипотез и решения вопросов управления на базе методов прикладной статистики.

Задания для самостоятельной работы

№ 107.

Вы купили в магазине компьютер, на который фирма-производитель дает два года гарантии. Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, какие — достоверные:

A = {компьютер не сломается в течение года};

B = {компьютер не сломается в течение двух лет};

C = {в течение двух лет вам не придется платить за ремонт компьютера};

D = {компьютер сломается на третий год}?

№ 108.

В коробке лежат 10 красных, 1 зеленая и 2 синие ручки. Из коробки наугад вынимают два предмета. Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, какие — достоверные:

A = {вынуты две красные ручки};

B = {вынуты две зеленые ручки};

C = {вынуты две синие ручки};

D = {вынуты ручки двух разных цветов};

E = {вынуты две ручки};

F = {вынуты два карандаша}?

№ 109.

В коробке — 15 шприцев, а медсестре нужно сделать 10 инъекций. Какие из следующих событий невозможные, какие — случайные, какие — достоверные:

A = {все инъекции будут сделаны в разное время};

B = {все инъекции будут сделаны одновременно};
C = {будет использован каждый шприц};
D = {найдется шприц, который не будет использован};
E = {в коробке не останется шприцев после выполнения всех инъекций};
F = {в коробке останется 8 шприцев после выполнения всех инъекций}?

№ 110.

Чему равна вероятность выпадения герба при бросании монеты?

Решение:

В простейших задачах на нахождение вероятности используется формула

$$P = \frac{m}{n},$$

где P — вероятность данного случайного события; m — количество благоприятных исходов для данного события; n — общее число исходов для данного события.

$n = 2$; $m = 1$; $P = 1/2$.

Ответ: 1/2.

№ 111.

Заполните таблицу ответов экспресс-опроса: «НАЙДИ СООТВЕТСТВИЕ».

1	Случайные	А	Появление одного из событий зависит от появления другого
2	Достоверные	Б	Появление одного из событий не зависит от появления другого
3	Невозможные	В	События, имеющие одинаковую вероятность
4	Противоположные	Г	Сумма вероятностей таких событий равна единице
5	Несовместные	Д	События, которые обязательно произойдут
6	Равновозможные	Е	События, которые никогда не произойдут
7	Независимые	Ж	События, которые могут произойти, а могут и не произойти
8	Зависимые	З	События, которые не могут произойти одновременно

Ответы к опросу:

1	2	3	4	5	6	7	8

Критерии оценки:

0 ошибок — оценка 5; 1 ошибка — оценка 4; 2–4 ошибки — оценка 3; > 4 ошибок — 2.

№ 112.

Какова вероятность появления шести очков при бросании игрального кубика?

$n = 6$; $m = 1$; $P = 1/6$.

Ответ: 1/6.

№ 113.

Чему равна вероятность появления более 4 очков в том же опыте?

$n = 6$; $m = 2$; $P = 2/6 = 1/3$.

Ответ: 1/3.

№ 114.

Опыт состоит в бросании двух монет. Найдите вероятность того, что появится хотя бы один герб.

Решение:

Обозначим A — появление хотя бы одного герба. Случаев в данном опыте четыре:

A_1 — герб на первой монете и герб на второй;
A_2 — решка на первой монете и решка на второй;
A_3 — герб на первой монете и решка на второй;
A_4 — решка на первой монете и герб на второй.

Три из них: A_1, A_3, A_4 — благоприятны событию A, значит, $m_A = 3$, $n = 4$, и формула определения вероятности дает $P(A) = 3/4$.

Ответ: 0,75.

№ 115.

В ящике 3 белых и 4 черных шара. Из ящика вынимается 1 шар. Найдите вероятность того, что этот шар — белый (событие A).

Решение:

$$n = 7,\ m_A = 3,\ P(A) = 3/7.$$

Ответ: 3/7.

№ 116.

В ящике 3 белых, 5 красных и 4 черных шара. Из ящика вынимают 1 шар. Найдите вероятность того, что этот шар будет красным (событие A).

$$n = 12,\ m_A = 5,\ P(A) = 5/12.$$

Ответ: $P(A) = 5/12$.

№ 117.

Из слова «поликлиника» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность, что это гласная? Что это буква К? Что это гласная или буква К?

Ответ: 5/11; 2/11; 7/11.

№ 118.

В ящике 5 черных, 3 белых и 2 красных шара. Какова вероятность вынуть: а) белый шар; б) красный шар; в) белый или красный шар; г) белый и красный, если первый взятый шар кладется обратно; д) белый и красный, если первый шар обратно не возвращается?

Решение:

а) $P = 0{,}3$;

б) $P = 0{,}2$;

в) $P = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$;

г) $P = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$;

д) $P = 0{,}3 \cdot 2/9 \approx 0{,}067$, или $P = 0{,}2 \cdot 3/9 \approx 0{,}067$.

Ответ: 0,067.

№ 119.

В ящике 3 белых и 4 черных шара. Из ящика вынимают сразу 2 шара. Найдите вероятность того, что оба шара — белые (событие A).

Решение:

1-й способ решения задачи.

Рассмотрим событие A — взяли из ящика сразу два шара, и они оба белые.

Нужно подсчитать общее число случаев n и число благоприятных случаев m_A. Сколькими способами можно выбрать из ящика 2 шара? Найдем число n всех возможных случаев в нашем примере, т.е. число способов, которыми можно выбрать 2 шара из 7:

$$n = C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot \cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}} = \frac{42}{2} = 21.$$

Сколькими способами можно выбрать 2 из имеющихся белых шаров? Вычислим число благоприятных случаев m_A, т.е. число способов какими можно выбрать 2 шара из 3 белых:

$$m_A = C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{\cancel{1\cdot 2}\cdot 3}{\cancel{1\cdot 2}\cdot 1} = \frac{3}{1} = 3.$$

Окончательно получаем $P_{(A)} = \dfrac{m_A}{n}$,

$$P(A) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: 1/7.

2-й способ решения задачи.

Рассмотрим 2 события: событие A — первый шар белый, событие B — второй шар белый. Очевидно, что

$$P(A) = \frac{3}{7}.$$

Если первый шар белый, то второй выбирается из оставшихся 6 шаров; из них 2 белых, значит,

$$P(B/A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда $P(A \text{ и } B) = P(A)\cdot P(B) = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{7}.$

Ответ: 1/7.

№ 120.

В ящике 3 белых и 4 черных шара. Из ящика берут сразу 3 шара. Найдите вероятность того, что 2 из них будут черными, а 1 — белым (событие A).

Решение:

Общее число случаев в данном опыте:

$$n = C_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Подсчитаем теперь число благоприятных случаев m_A. Сколькими способами можно выбрать 2 из 4 черных шаров?

$$C_4^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6 \text{ способами.}$$

К каждой комбинации черных шаров можно разными способами присоединить 1 белый шар; его можно выбрать $C_3^1 = 3$ способами. Каждая комбинация черных шаров может сочетаться с каждым из белых, поэтому общее число благоприятных случаев

$$m_A = C_4^2 \cdot C_3^1 = 6 \cdot 3 = 18,$$

откуда по формуле найдем

$$P(A) = 18/35 \approx 0{,}514.$$

Ответ: 0,514.

№ 121.

Некий гражданин купил карточку лотереи и наугад отметил в ней 6 из имеющихся 49 номеров. Найдите вероятность того, что он правильно угадал 3 из 6 номеров, которые будут опубликованы в списке «выигравших».

Решение:

Рассмотрим событие: A — угадано 3 номера из 6 (значит, остальные 3 не угаданы).

$$P(A) = \frac{C_6{}^3 \cdot C_{43}{}^3}{C_{49}{}^6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 4 \cdot 5}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} \approx 0{,}0176.$$

Итак, вероятность правильно угадать 3 номера из 6 очень невелика — около 1,8%. Ясно, что вероятность угадать 4 номера, 5 или все 6 — еще меньше.

Ответ: 0,0176.

№ 122.

Из полного набора домино (28 шт.) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками?

Решение:

Найдем вероятность противоположного события, т.е. из выбранных 7 костей нет ни одной с шестью очками: $P(\bar{A}) = C_{21}{}^7 / C_{28}{}^7 \approx 0{,}068.$

Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}932.$

Ответ: 0,932.

№ 123.

В коробке 30 галстуков, 12 из них красные, остальные черные. Определите вероятность того, что из 4 вынутых галстуков все будут одного цвета.

Решение:

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ — событие: выбирают} \\ 4 \text{ красных} \\ B \text{ — событие: выбирают} \\ 4 \text{ черных} \end{array}\right\} \text{несовместные события}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B);$$

$$P(A) = \frac{C_{12}^4}{C_{30}^4} = \frac{12!}{4!8!} : \frac{30!}{4!26!} =$$

$$= \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} : \frac{27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$

$$= \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{11880}{657720} \approx 0{,}0181;$$

$$P(B) = \frac{C_{18}^4}{C_{30}^4} = \frac{18!}{4!14!} : \frac{30!}{4!26!} =$$

$$= \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} : \frac{27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30} =$$

$$= \frac{73440}{657720} = 0{,}1117.$$

$$P(A + B) = 0{,}0181 + 0{,}1117 = 0{,}1298.$$

Ответ: 0,1298.

№ 124.

Из 60 вопросов студент подготовил к экзамену 50. Какова вероятность, что он сдаст экзамен, если билет содержит 3 вопроса?

Решение:

Событие A — студент сдаст экзамен.

$$P(A) = \frac{C^3{}_{50}}{C^3{}_{60}} = \frac{50!}{3!47!} : \frac{60!}{3!57!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50}{58 \cdot 59 \cdot 60} \approx 0{,}57.$$

Ответ: 0,57.

№ 125.

В накопителе для бумаг имеется 15 историй болезни, среди них 10 заполненных необходимыми анализами. Медсестра наугад извлекает 3 истории болезни. Найдите вероятность того, что извлеченные документы окажутся уже заполненными.

Решение:

Событие A — все 3 истории болезни заполнены необходимыми анализами.

$$P(A) = \frac{C^3{}_{10}}{C^3{}_{15}} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91} \approx 0{,}26.$$

Ответ: 0,26.

№ 126.

Из 1000 новорожденных 511 оказались мальчиками. Найдите вероятность рождения мальчика и вероятность рождения девочки.

№ 127.

Какова вероятность появления нечетного числа очков при бросании игрального кубика? Четного числа?

№ 128.

При бросании дважды игрального кубика выпало в сумме 9 очков. Какова вероятность того, что второй раз выпало 6 очков?

№ 129.

Вероятность заболеть гриппом во время эпидемии равна 0,75. Сколько человек может заболеть этой болезнью на первом курсе колледжа, если поступили учиться 400 человек?

№ 130.

В ящике 4 белых и 5 черных шаров. Вынимают наугад 2 шара. Найдите вероятность того, что оба шара белые. Решите задачу двумя способами.

№ 131.

Из 1000 выпускников медицинского колледжа 720 человек работают по своей специальности, 70 человек продолжают обучение в медицинском институте. Найдите вероятность того, что выпускник останется в отрасли здравоохранения.

№ 132.

На лекции присутствуют 100 студентов. Из них по математике имеют оценку «отлично» 20 человек, «хорошо» — 50, «удовлетворительно» — 24 и «неудовлетворительно» — 6. Какова вероятность того, что вызванный наугад студент не имеет задолженностей по математике?

№ 133.

В корзине находятся 2 белых и 3 черных шара. Найдите вероятность того, что один за другим будут вынуты все черные шары.

№ 134.

В ящике 20 шаров с номерами от 1 до 20. Какова вероятность вынуть шар с номером 37?

№ 135.

На экзамене 40 билетов, студент не выучил 10 билетов. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный билет.

№ 136.

Телевизор включается на случайном канале. Кабельное телевидение предоставляет три образовательных канала из 60. Какова вероятность включения образовательного канала?

№ 137.

При включении телевизора на 15 каналах из 60 идет реклама. Какова вероятность не попасть на рекламу?

№ 138.

Для участия в конкурсе «Лучший фельдшер» пригласили 26 студентов из медицинских колледжей, 9 из них из одного колледжа Волгограда. Перед началом соревнования конкурсантов разбивают на пары по жребию. Какова вероятность, что Иван Петров из Волгограда окажется в паре со студентом из своего колледжа?

№ 139.

В корзине находятся 2 белых и 3 черных шара. Из нее извлекаются шары и возвращаются обратно. Найдите вероятность того, что три раза подряд будет вынут черный шар.

№ 140.

В ящике 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

№ 141.

В ящике 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули наугад один шар. Найдите вероятность, что взятый шар: а) белый; б) синий; в) белый или черный; г) белый, синий или красный.

№ 142.

В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

№ 143.

Из партии, содержащей 10 шприцев, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 2 изделия для контроля. Найдите вероятность: события A — из 2 шприцов нет ни одного бракованного; события B — в полученной выборке — 1 шприц бракованный.

№ 144.

В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 рублей, на 4 билета — выигрыш по 50 рублей, на 10 билетов — выигрыш по 20 рублей, на 20 билетов — выигрыш по 10 рублей, на 165 билетов — выигрыш по 5 рублей, на 400 билетов — выигрыш по 1 рублю. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 рублей?

№ 145.

Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,75, второго — 0,8, третьего — 0,9. Определите вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

№ 146.

Выполните тестовые задания.

1. В ящике 4 черных и 6 белых шаров. Из урны случайным образом берут один шар. Вероятность того, что этот шар окажется черным, равна:
   A) 0,4; B) 0,6;
   C) 0,2; D) 1.
2. Если вероятность попадания в мишень составляет 0,3, тогда вероятность промаха равна:
   A) 0,3; B) 0,5;
   C) 0,7; D) 1,3.
3. Теория вероятности — это раздел математики, изучающий связи между:
   A) экспериментальными данными;
   B) функциями;
   C) методами систематизации;
   D) вероятностями случайных событий.
4. Студент сдаст экзамен на «5» с вероятностью 0,4, а 2-й студент с вероятностью 0,5. Вероятность сдачи этими студентами экзамена на «отлично» равна:
   A) 0; B) 0,2;
   C) 0,9; D) 0,1.
5. В ящике 3 желтых, 5 синих и 2 красных шара. Вероятность не вытащить желтый шар равна:

A) 0,3; B) 1;
C) 0,7; D) 0.

6. Из партии в 100 игрушек 2 бракованных. Относительная частота брака составляет:
A) 0,2; B) 0,02;
C) 0; D) 2.

7. Вероятность появления одного из двух несовместных событий A и B, если P(A) = 0,4 и P(B) = 0,3 равна:
A) 0,1; B) 0,12;
C) 0,3; D) 0,7.

8. Вероятность выпадения трех очков при бросании игрального кубика равна:
A) 1/36; B) 1/6;
C) 0; D) 1.

9. Вероятность появления двух единиц при бросании двух игральных кубиков равна:
A) 1/36; B) 1/6;
C) 0; D) 1.

10. Вероятность вытащить из колоды карт в 36 штук карту пиковой масти равна:
A) 1/4; B) 1/36;
C) 1/6; D) 1/9.

Вопросы по теме

1. *Дайте определения основным понятиям теории вероятности: случайное событие, достоверное событие, невозможное событие, вероятность случайного события.*
2. *Сформулируйте классическое определение вероятности. В каких пределах изменяется вероятность случайного события?*
3. *Сформулируйте основные теоремы теории вероятностей: теорему сложения вероятностей и теорему умножения вероятностей.*
4. *Сформулируйте закон больших чисел.*
5. *Где находит применение теория вероятностей?*

Тема 4.2. Закон распределения дискретной случайной величины

Термины

- Дискретная случайная величина
- Непрерывная случайная величина
- Закон распределения дискретной случайной величины
- Математическое ожидание дискретной случайной величины
- Дисперсия дискретной случайной величины
- Среднее квадратическое отклонение

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дискретная случайная величина

Случайные величины делят на две разновидности:

- дискретные, которые могут принимать только конкретные, заранее оговоренные значения (например, значения чисел на верхней грани брошенной игральной кости или порядковые значения текущего месяца);
- непрерывные (чаще всего значения некоторых физических величин: веса, расстояния, температуры и т.п.), которые по законам природы могут принимать любые значения, хотя бы и в некотором интервале.

Закон распределения случайной величины — это соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и ее вероятностями, обычно записывается в таблицу:

X_i	X_1	X_2	...	X_n
P_i	P_1	P_2	...	P_n

Статистическое определение вероятности выражается через относительную частоту случайного события, т.е. находится как отношение количества случайных величин к общему числу случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений значений величины X на вероятности этих значений. Математическое ожидание обозначают $\overline{X}$ или $M(X)$:

$$\overline{X} = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Рассеяние случайной величины относительно ее математического ожидания определяется с помощью числовой характеристики, называемой дисперсией. Проще говоря, дисперсия — это разброс случайной величины относительно среднего значения. Для понятия сущности дисперсии рассмотрим пример. Средняя заработная плата по стране составляет около 25 тысяч рублей. Откуда берется эта цифра? Скорее всего складываются все зарплаты и делятся на количество работников. В данном случае очень большая дисперсия (минимальная зарплата около 4 тыс. руб., а максимальная — около 100 тыс. руб.). Если бы зарплата у всех была одинаковой, то дисперсия была бы равна нулю, и разброса бы не было.

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата разности случайной величины и ее математического ожидания:

$$D = M[(X - M(X))^2].$$

Используя определение математического ожидания для вычисления дисперсии, получаем формулу

$$D = \sum_{i=1}^{n} (X_i - M(X))^2 \cdot p_i.$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности, что и сама случайная величина, используют среднее квадратичное отклонение.

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют корень квадратный из ее дисперсии $\sigma = \sqrt{D}$.

Среднее квадратичное отклонение есть мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания.

Задания для самостоятельной работы

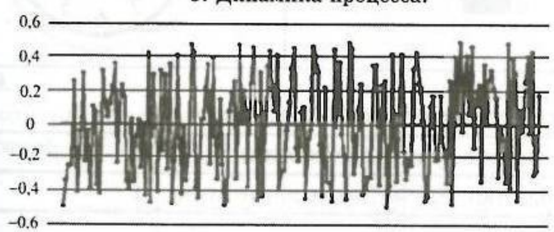
№ 147.

Распределите случайные величины на дискретные и непрерывные:

1. Показания прибора.

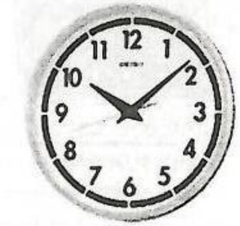
2. Изменение величины во времени.

3. Динамика процесса.



4. Рост ребенка.

5. Кардиограмма сердца.

6. Размер головы. 	7. Время на электронных часах. 
8. Вес ребенка. 	9. Время на механических часах. 

Запишите в таблицу их номера:

Дискретные случайные величины	
Непрерывные случайные величины	

№ 148.

В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 1000 рублей, 10 выигрышей по 100 рублей и 100 выигрышей по 1 рублю при общем числе билетов 10000. Составьте закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета и определите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Решение:

$$X_1 = 1000,\ X_2 = 100,\ X_3 = 1,\ X_4 = 0,$$
$$P_1 = 1/10000 = 0{,}0001,\ P_2 = 10/10000 = 0{,}001,$$
$$P_3 = 100/10000 = 0{,}01,\ P_4 = 1 - (P_1 + P_2 + P_3) = 0{,}9889.$$

Результаты поместим в таблицу:

X	1000	100	1	0
P	0,0001	0,001	0,01	0,9889

Математическое ожидание — сумма парных произведений значения случайной величины на их вероятность. Для данной задачи его целесообразно вычислить по формуле

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

$$\overline{X} = 1000 \cdot 0{,}0001 + 100 \cdot 0{,}001 + 1 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0{,}9889 = 0{,}21 \text{ рубля}.$$

Получили настоящую «справедливую» цену билета.

$$D = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i =$$
$$= (1000 - 0{,}21)^2 \cdot 0{,}0001 + (100 - 0{,}21)^2 \cdot 0{,}001 + (1 - 0{,}21)^2 \cdot 0{,}01 + (0 - 0{,}21)^2 \cdot 0{,}9889 \approx 109{,}97;$$
$$\sigma = \sqrt{D} \approx 10{,}49.$$

№ 149.

Закон распределения случайной величины X задан следующей таблицей:

X	1	2	4	5
P	0,1	0,4	0,4	0,1

Найдите ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

Решение:

Используем приведенные выше формулы:

$$\overline{X} = M(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 = 3.$$
$$D = (1-3)^2 \cdot 0{,}1 + (2-3)^2 \cdot 0{,}4 + (4-3)^2 \cdot 0{,}4 + (5-3)^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}6.$$
$$\sigma = \sqrt{1{,}6} = 1{,}26.$$

№ 150.

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, если ее закон распределения задан таблицей:

Вариант 1.

X	17	19	20	25	31	32	33	40	41
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 2.

X	5	9	10	12	15	18	20	23	24
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,43	0,15	0,1	0,05	0,03

Вариант 3.

X	90	92	93	98	104	105	106	113	114
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 4.

X	18	19	21	25	28	32	34	39	40
P	0,05	0,1	0,11	0,12	0,24	0,12	0,11	0,1	0,05

Вариант 5.

X	47	49	50	51	52	53	55	60	61
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,4	0,18	0,1	0,05	0,03

Вариант 6.

X	1	5	10	11	15	19	25	30	35
P	0,02	0,08	0,13	0,16	0,3	0,16	0,1	0,04	0,01

Вариант 7.

X	107	109	112	125	131	132	133	140	141
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 8.

X	67	68	71	74	76	78	81	84	88
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,17	0,15	0,12	0,1	0,05

Вариант 9.

X	12	15	18	21	22	25	29	31	32
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 10.

X	1,7	1,9	2,0	2,5	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1
P	0,01	0,04	0,1	0,15	0,4	0,15	0,09	0,04	0,02

Вариант 11.

X	15	16	17	18	19	20	21	22	23
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 12.

X	25	26	27	28	29	30	31	32	33
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,43	0,15	0,1	0,05	0,03

Вариант 13.

X	30	31	32	33	34	35	36	37	38
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 14.

X	35	36	37	38	39	40	41	42	43
P	0,05	0,1	0,11	0,12	0,24	0,12	0,11	0,1	0,05

Вариант 15.

X	40	42	44	46	48	50	52	54	56
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,4	0,18	0,1	0,05	0,03

Вариант 16.

X	45	49	51	55	61	63	65	67	69
P	0,02	0,08	0,13	0,16	0,3	0,16	0,1	0,04	0,01

Вариант 17.

X	47	49	53	56	58	65	66	68	70
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 18.

X	53	55	59	63	64	66	69	70	72
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,17	0,15	0,12	0,1	0,05

Вариант 19.

X	61	63	66	67	69	73	75	76	78
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 20.

X	65	67	68	69	72	73	74	78	79
P	0,02	0,08	0,13	0,16	0,3	0,16	0,1	0,04	0,01

Вариант 21.

X	75	77	78	79	81	84	85	86	88
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 22.

X	2	4	5	8	11	13	15	16	20
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,43	0,15	0,1	0,05	0,03

Вариант 23.

X	13	16	17	19	22	24	26	28	30
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 24.

X	21	25	29	31	34	36	40	41	45
P	0,05	0,1	0,11	0,12	0,24	0,12	0,11	0,1	0,05

Вариант 25.

X	63	65	69	70	71	75	76	78	80
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,4	0,18	0,1	0,05	0,03

Вариант 26.

X	70	72	75	77	79	82	84	86	90
P	0,02	0,08	0,13	0,16	0,3	0,16	0,1	0,04	0,01

Вариант 27.

X	82	84	88	91	93	94	95	97	100
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 28.

X	111	113	114	115	116	118	119	120	122
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,17	0,15	0,12	0,1	0,05

Вариант 29.

X	90	91	92	93	94	95	96	97	98
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 30.

X	1	3	6	8	9	11	12	14	15
P	0,02	0,08	0,13	0,16	0,3	0,16	0,1	0,04	0,01

Вариант 31.

X	95	96	98	100	102	103	105	108	110
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 32.

X	11	13	15	17	19	21	22	24	25
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,43	0,15	0,1	0,05	0,03

Вариант 33.

X	20	22	24	26	28	30	31	33	35
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 34.

X	25	27	29	31	33	35	37	39	40
P	0,05	0,1	0,11	0,12	0,24	0,12	0,11	0,1	0,05

Вариант 35.

X	100	102	104	106	108	110	112	114	116
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,4	0,18	0,1	0,05	0,03

Вариант 36.

X	115	116	117	118	119	120	121	122	123
P	0,02	0,08	0,13	0,16	0,3	0,16	0,1	0,04	0,01

Вариант 37.

X	158	159	160	161	162	163	164	165	166
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 38.

X	15	16	19	21	22	24	26	29	30
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,17	0,15	0,12	0,1	0,05

Вариант 39.

X	31	32	33	34	35	36	37	38	39
P	0,05	0,1	0,11	0,15	0,2	0,15	0,1	0,09	0,05

Вариант 40.

X	42	43	44	45	46	47	48	49	50
P	0,01	0,03	0,05	0,15	0,4	0,18	0,1	0,05	0,03

№ 151.

Заполните таблицу ответов экспресс-опроса: «НАЙДИ СООТВЕТСТВИЕ».

1	Событие, которое может произойти, а может и не произойти	А	Дисперсия
2	Среднее значение случайной величины	Б	Конъюнкция
3	Операция логического умножения	В	$P=\frac{m}{n}$
4	Формула вероятности	Г	Логика
5	Рассеяние случайной величины	Д	Случайное
6	Наука о формах и способах мышления	Е	Дизъюнкция
7	Дискретность	Ж	Инверсия
8	Операция логического сложения	З	$P=n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$
9	Формула перестановок	И	Математическое ожидание
10	Отрицание	К	Прерывистость

Ответы к опросу:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Критерии оценки:
0 ошибок — оценка 5; 1 ошибка — оценка 4; 2–4 ошибки — оценка 3; > 4 ошибок — 2.

Вопросы по теме

1. *Дайте определения дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины, приведите примеры.*
2. *Перечислите основные характеристики дискретной случайной величины, дайте им определения, поясните формулы, по которым они находятся.*
3. *Сформулируйте закон распределения случайной величины.*
4. *Что показывает математическое ожидание?*
5. *Каково смысловое значение дисперсии?*

Тема 4.3. Математическая статистика и ее роль в медицине и здравоохранении

Термины

- Математическая статистика
- Задачи статистики
- Генеральная совокупность
- Выборочная совокупность
- Этапы статистического исследования
- Санитарная статистика
- Статистический отчет
- Показатели деятельности ЛПУ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Математическая статистика — раздел прикладной математики, наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов. Во многих своих разделах математическая статистика опирается на теорию вероятности, позволяющую оценить надежность и точность выводов. Этот раздел прикладной математики посвящен изучению случайных величин по результатам наблюдений.

Развитие статистической науки, расширение сферы практической статистической работы привели к изменению содержания самого понятия «статистика». В настоящее время данный термин употребляется в трех значениях:

— под статистикой понимают отрасль практической деятельности, которая имеет своей целью сбор, обработку, анализ и публикацию массовых данных о самых различных явлениях общественной жизни (в этом смысле «статистика» выступает как синоним словосочетания «статистический учет»);

— статистикой называют цифровой материал, служащий для характеристики какой-либо области общественных явлений или территориального распределения какого-то показателя;

— статистикой называется отрасль знания, особая научная дисциплина, соответственно учебный предмет в высших и средних специальных учебных заведениях. Медицинские работники, например, изучают санитарную статистику.

Задачи статистической науки:

1. Постоянные (долговременные): а) обеспечить органы управления государством, регионами, отраслями и отдельными предприятиями своевременной полной и достоверной информацией, необходимой для принятия решений; б) информировать общественность о явлениях и процессах, происходящих в обществе.

2. Актуальные задачи формируются исходя из потребности общества и экономики на современном этапе: а) получение объективной информации о деятельности хозяйственных структур; б) создание автоматизированных баз данных о деятельности текущих хозяйственных структур с возможностью санкционированного доступа к ним для получения информации, необходимой для решения текущих хозяйственных задач; в) прогнозирование развития важных социально-экономических процессов и явлений; г) распространение выборочных обследований во всех секторах общественной и экономической жизни; д) проведение организационно-методологической работы по постепенному переходу на систему национальных счетов.

Исследование массовых общественных явлений включает в себя следующие **этапы** (этапы статистического исследования):

1) сбор статистической информации и ее первичная обработка (статистическое наблюдение);
2) группировка и выборка результатов наблюдения в определенные совокупности;
3) обобщение и анализ полученных материалов.

На первом этапе статистического исследования формируются первичные статистические данные, или исходная статистическая информация, которая является фундаментом будущего статистического здания. Если при сборе первичных статистических данных допущена ошибка или материал оказался недоброкачественным, это повлияет на правильность и достоверность как теоретических, так и практических выводов. Поэтому статистическое наблюдение от начальной до завершающей стадии — получения итоговых материалов — должно быть тщательно продуманным и четко организованным.

Статистическое наблюдение представляет собой научно организованный по единой программе учет фактов, характеризующих явления и процессы общественной жизни, и сбор полученных на основе этого учета массовых данных. К статистическому наблюдению предъявляются следующие требования:

1) полнота статистических данных (полнота охвата единиц изучаемой совокупности, сторон того или иного явления, а также полнота охвата во времени);

2) достоверность и точность данных;
3) их единообразие и сопоставимость.

Однако не всякий сбор сведений является статистическим наблюдением. О статистическом наблюдении можно говорить лишь тогда, когда изучаются статистические закономерности, т.е. такие, которые проявляются только в массовом процессе, в большом числе единиц какой-то совокупности. Поэтому статистическое наблюдение должно быть планомерным, массовым и систематическим.

На втором этапе совокупность делится по признакам различия и объединяется по признакам сходства, подсчитываются суммарные показатели по группам и в целом. С помощью различных методов изучаемые явления делятся на важнейшие типы, характерные группы и подгруппы по существенным признакам. С помощью группировок ограничивают качественно однородные в существенном отношении совокупности, что является предпосылкой для определения и применения обобщающих показателей.

На заключительном этапе анализа с помощью обобщающих показателей рассчитываются относительные и средние величины, дается сводная оценка вариации признаков, характеризуется динамика явлений, применяются индексы, балансовые построения, рассчитываются показатели, характеризующие тесноту связей в изменении признаков. С целью наиболее рационального и наглядного изложения цифрового материала он представляется в виде таблиц и графиков.

Статистическая совокупность — это множество явлений, имеющих один или несколько общих признаков и отличающихся между собой по значениям других признаков.

Единица совокупности — каждое отдельное явление, подлежащее учету, наделенное признаками сходства.

Учетные признаки — это свойства, характерная черта явления, подлежащая статистическому изучению. Делятся на:

1) качественные (атрибутивные) — выражают существенное неотъемлемое свойство предмета. Противоположные качественные признаки называют альтернативными (мужчина — женщина, отличник — не отличник и т.д.);

2) количественные — отдельные значения различаются по величине (возраст, рост, вес).

Статистические данные — сведения о числе объектов какой-либо обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками (например, число студентов, родившихся в 1985 г.). Являются исходным материалом для любого статистического исследования. На основании статистических данных можно сделать научно обоснованные выводы. Для этого статистические данные должны быть предварительно определенным образом систематизированы и обработаны.

Одним из основных методов обработки статистических данных является **выборочный метод.** При выборочном исследовании из всей совокупности отбирают некоторым образом определенное число объектов и только их подвергают исследованию.

Генеральная совокупность — совокупность всех исследуемых объектов. Генеральную совокупность образуют, например, все больные с данным диагнозом, все новорожденные и дети и т.д. Общую сумму членов генеральной совокупности называют ее объемом и обозначают буквой N. Теоретически объем генеральной совокупности ничем не ограничен ($N \to \infty$). Поэтому обычно изучается какая-то часть объектов генеральной совокупности — выборка.

Выборочная совокупность (выборка) — набор случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Санитарная (медицинская) статистика

Санитарную статистику можно назвать одним из важнейших разделов социальной статистики, позволяющих сделать заключение о главном факторе развития страны — о здоровье населения, о безопасности среды обитания для здоровья человека.

Санитарная статистика в Статистическом словаре трактуется так: «Отрасль социальной статистики, изучающая количественные характеристики состояния здоровья населения, развития системы здравоохранения, определяет степень интенсивности влияния на них социально-экономических факторов, а также занимается приложением статистических методов к обработке и анализу результатов клинических и лабораторных исследований».

Термин «санитарная статистика» употребляется довольно редко — чаще данная отрасль статистики называется «статистика здоровья и медицинского обслуживания населения».

В настоящее время в состав санитарной статистики входят показатели здоровья населения, здравоохранения, клинической статистики, состояния окружающей среды, характеризующие степень ее безопасности и позволяющие измерить ее влияние на здоровье человека.

В Статистическом словаре перечисляются и задачи санитарной статистики: «...своевременное получение и разработка данных о заболеваемости, смертности, инвалидности, физическом развитии населения в целом и отдельных его групп, о размещении, состоянии, оснащении, медицинских кадрах учреждений здравоохранения, клинических и лабораторных исследованиях». Санитарная статистика необходима для: подготовки федеральных и региональных программ медицинского обслуживания населения, страхования, развития социальной инфраструктуры (строительства и реконструкции жилья, магазинов, клубов, стадионов, спортивных площадок и т. д.); программ по охране труда, жилищной программы, оказания социальной помощи и других социальных программ; популяризации здорового образа жизни; проведения мероприятий по обеспечению безопасности окружающей среды для здоровья человека и т. д.

Источниками данных санитарной статистики являются: первичная учетная медицинская документация, которая ежедневно ведется в учреждениях здравоохранения; статистическая отчетность; единовременные учеты, лабораторные и клинические выборочные и специальные обследования. Отдел статистики входит в структуру практически каждого лечебно-профилактического учреждения.

Государственная отчетность по здравоохранению позволяет количественно охарактеризовать состояние и изменение здоровья населения.

Санитарная (медицинская) статистика является одной из основных отраслей статистической науки и важ-

нейшим методическим разделом социальной гигиены и организации здравоохранения.

В задачи санитарной статистики входит:

1) определение уровня и сдвигов в здоровье отдельных групп населения;
2) оценка влияния социально-биологических факторов на здоровье населения;
3) анализ данных о сети, кадрах, деятельности лечебно-профилактических учреждений (ЛПУ);
4) определение эффективности лечебно-профилактических мероприятий;
5) использование статистических методов в экспериментальных, клинико-биологических, социально-гигиенических исследованиях.

Важнейшим принципом статистики является применение ее для изучения не единичных, а массовых явлений, объединенных в группы (совокупности) для выявления общих свойств и закономерностей. Эти закономерности, как правило, не могут быть обнаружены при наблюдении за единичными явлениями, а проявляются в массе наблюдений.

Основные разделы санитарной статистики (статистики здравоохранения):

1) статистика лечебно-профилактической помощи взрослому населению,
2) статистика службы охраны материнства и детства,
3) статистика санитарно-профилактической службы,
4) статистика медицинских кадров и т. д.

Источниками данных санитарной статистики являются: первичная учетная медицинская документация, которая ежедневно ведется в учреждениях здравоохранения; статистическая отчетность; единовременные учеты; лабораторные и клинические выборочные и специальные обследования. Отдел статистики входит в структуру практически каждого ЛПУ. Государственная отчетность по здравоохранению позволяет количественно охарактеризовать состояние и изменение здоровья населения. Годовая отчетность лечебных и лечебно-профилактических организаций независимо от организационно-правовой формы и формы собственности предоставляет данные об определенных категориях лиц, получающих

11. Зак. 475

медицинскую помощь, а также о работе учреждений системы здравоохранения и их обеспеченности кадрами. Кроме того, существует годовая отчетность, нацеленная на сбор данных по территориальным единицам. Например, «Отчет о числе заболеваний, зарегистрированных у больных, проживающих в районе обслуживания ЛПУ» (форма № 12); «Отчет о санитарном состоянии района, города, области, края, республики» (форма № 18); «Отчет о сети и деятельности медицинских учреждений» (форма № 47); «Отчет ЛПУ» (форма № 30); «Листок учета движения больных» (форма № 007-У). Последние две формы отчетности составляются территориальными органами управления здравоохранения. Из периодической месячной отчетности следует выделить «Отчет об инфекционных и паразитических заболеваниях» (форма № 1) и «Отчет о результатах исследования крови на СПИД» (форма № 4). Статистическая отчетность не постоянна, она изменяется: вводятся новые формы, какие-то формы отменяются. Однако эти изменения не затрагивают основной объем информации и ее содержание. Обеспечивается преемственность собираемых данных и тем самым возможность анализа их изменений во времени. Получая информацию через статистическую отчетность, территориальные органы Министерства здравоохранения России и службы государственной статистики обобщают данные по населенным пунктам, городам, территориям, субъектам Федерации, рассчитывают сводные показатели, анализируют их изменения. Показатели включаются в статистические сборники и публикуются Госкомстатом России, региональными органами государственной статистики в средствах массовой информации.

Статистическая совокупность, ее элементы, признаки

Статистическая совокупность — группа, состоящая из множества относительно однородных элементов (единиц наблюдения). (Например, группа оперированных, население на участке, больные стационара, новорожденные на данном участке, пациенты поликлиники, больные

на дому и т.п.) Единица наблюдения — каждое отдельное явление, подлежащее учету, наделенное признаком сходства.

В большинстве социально-гигиенических исследований учитываемыми признаками являются: пол, возраст, семейное положение, уровень образования, доход, размер жилплощади на одного человека, масса тела, рост, длительность пребывания в стационаре и др. (количественные признаки, выраженные числом). Различают также факторные и результативные признаки в зависимости от характера влияния: какой признак на какой влияет (возраст — факторный признак, а рост — результативный).

Показатели деятельности ЛПУ

Методами обработки медико-биологических исследований являются методы расчета средних и относительных величин.

Основные показатели, определяющие деятельность ЛПУ и ФАП:

- удельный вес посещений ЛПУ населением;
- охват населения целевыми осмотрами для выявления туберкулеза;
- охват диспансерным наблюдением;
- среднегодовая занятость койки;
- средняя длительность пребывания больного на койке;
- оборот койки;
- больничная летальность и т. д.

Показатели деятельности медицинских учреждений позволяют проводить экономический анализ деятельности ЛПУ. Направления экономического анализа:

- Использование основных фондов.
- Эффективность использования коечного фонда.
- Эффективность использования медицинского оборудования.
- Оценка финансовых расходов и стоимости медицинской помощи.
- Эффективность использования медицинского и прочего персонала.

Основные фонды — совокупность произведенных общественным трудом материально-технических ценностей, используемых в течение длительного периода и утрачивающих стоимость по частям. Существует несколько классификаций: производственные и непроизводственные; по видам (группам) и т.д.

В совокупности основных фондов выделяют активную и пассивную часть.

Активная часть — непосредственно воздействующая на продукт труда, определяет масштаб производства и уровень производительности работающих.

Пассивная часть — основные фонды, которые создают необходимые условия для процесса труда: здания, сооружения и т.д. Соотношение активной и пассивной части — величина переменная, зависящая от отрасли производства, ее технической оснащенности и других факторов. В здравоохранении России считается нормой доля активной части не менее 20%.

Анализ использования основных фондов лечебного учреждения проводится по форме годового отчета № 5 «Движение основных средств» (основные средства — это основные фонды в денежном выражении). Основные применяемые показатели:

Фондовооруженность труда персонала — показатель, характеризующий уровень технической оснащенности трудовых процессов, величину основных фондов на одного работающего.

Фондовооруженность медицинского персонала — рассчитывается по отношению к активной части основных фондов.

Фондоотдача — обобщающий показатель эффективности воспроизводства и использования основных фондов, выражается в натуральном и стоимостном выражении, отдельно для стационара и поликлиники.

В натуральном выражении определяется отношением числа пролеченных (госпитализированных стационара или обратившихся в поликлинику) к стоимости основных фондов (на 1000 руб.). В стоимостном выражении — затраты на содержание ЛПУ, приходящиеся на 1000 руб. основных фондов, однако данный показатель имеет меньшее значение.

Фондоемкость — стоимость основных производственных фондов на единицу объема производства продукции, величина, обратная фондоотдаче, отношение стоимости основных фондов стационара (поликлиники) к числу пролеченных на 1000 человек.

Обновление основных фондов — характеризуют три показателя: коэффициент выбытия, коэффициент обновления и коэффициент накопления. Эталон обновления 12–15%.

Рентабельность основных фондов — это отношение прибыли к среднегодовой стоимости основных фондов в рублях, выраженное в процентах.

Эффективность использования коечного фонда анализируется на основе следующих источников информации: «Отчет ЛПУ» (форма № 30) и «Листок учета движения больных» (форма № 007-у). Используемые показатели:

— **Оборот больничной койки** — характеризует численность больных, находившихся на больничной койке в течение года (для городских стационаров оптимально 17–20):

Число пролеченных больных / среднегодовое число коек.

— **Функция больничной койки** (*Ф*) — плановый показатель, отражающий возможность обслуживать одной койкой определенное количество больных, рассчитывается $Ф = Д / П$, где *Д* — среднегодовая занятость койки с учетом профиля, *П* — среднее число дней пребывания на койке.

— **Среднегодовая занятость (работа) койки** — определяется как отношение числа фактически проведенных больными койко-дней к среднегодовому числу больничных коек.

Оценивается путем сравнения с нормативными показателями, которые зависят от специальности, уровня и типа ЛПУ (городское, сельское), мощности и других факторов. Оптимальная занятость койки определяется: $Д = \dfrac{365K}{K + 3\sqrt{K}}$, где *Д* — среднее число дней работы койки в году, *К* — среднегодовое число коек в стационаре.

Показатель может быть занижен по объективным причинам: вынужденный простой в связи с ремонтом, карантином и т.д. В этих случаях вычисляется **показатель работы функционирующей койки** по следующей схеме:

1) Расчет среднего числа коек, свернутых в течение года = число дней закрытия на ремонт / число календарных дней в году;
2) Определение числа коек, функционирующих в течение года = среднегодовое число коек — число коек, свернутых в течение года;
3) Расчет показателя работы койки с учетом закрытия на ремонт = число койко-дней, фактически проведенных больными / число функционировавших коек.

— **Среднее время простоя коек** — время от момента освобождения койки выписанным до занятия вновь поступившим (в связи с оборотом).

$T = \frac{365 - Д}{Ф}$, где $Д$ — среднегодовая занятость койки данного профиля, $Ф$ — функция койки данного профиля.

Простой койки оценивается путем сравнения с нормативным или определенным в качестве оптимального для данного учреждения. Среднее время простоя коек выше оптимального ведет к экономическому ущербу, менее (вплоть до отрицательного значения) — к перегрузке и нарушению санитарного режима.

— **Выполнение плана койко-дней** по стационару определяется в процентах как отношение числа фактически проведенных больными койко-дней к плановому числу койко-дней. Плановое число может определяться нормативом занятости койки в зависимости от профиля медицинской помощи и уровня ее оказания. В современных условиях объем деятельности в койко-днях часто планируется на основе задания ЛПУ по реализации программ государственных гарантий оказания населению бесплатной медицинской помощи.

— **Средняя длительность пребывания** больного в стационаре определяется как соотношение числа койко-дней, проведенных больными в стационаре, к числу пролеченных больных. Зависит от типа и профиля больницы, организации работы, интенсивности и качества лечебно-диагностического процесса.

Для анализа **эффективности использования медицинского оборудования** целесообразно использовать следующие показатели:

— **Коэффициент календарного обслуживания** — отношение времени возможного использования медицинской техники в соответствии с режимом работы ЛПУ к календарному числу дней в году (норматив — 0,9).

— **Коэффициент сменности** — числа фактических часов работы медицинской техники к числу максимально возможных часов работы медицинской техники по паспортным данным (норматив — 0,6).

При анализе **эффективности использования медицинского персонала** используют следующие показатели:

— **Число медицинских работников на 1000 жителей** (по врачам и среднему медперсоналу).

— **Соотношение численности врачей и среднего медперсонала.**

— **Число медицинских работников на 100 коек** стационара (по врачам и среднему медперсоналу).

— **Производительность труда** — доходы от реализации медицинских услуг к численности работающих, участвующих в получении этого дохода.

Показатели сравниваются в динамике за несколько лет и с другими однотипными учреждениями.

Оценка финансовых расходов и стоимости медицинской помощи — это важнейший компонент экономического анализа деятельности ЛПУ. Основными показателями являются структура финансовых расходов и себестоимость медицинских услуг, а также рентабельность деятельности. Показатели удельного веса отдельных видов затрат (заработная плата, расходы на питание, на медикаменты) определяются общими методами в процентах. Показатель рентабельности рассчитывается как соотношение прибыли (дохода) от деятельности к общему объему реализации.

Критерии для характеристик некоторых показателей

- Хорошим показателем участковости считается 80–85%, следует учитывать, что чем выше показатель, тем правильнее организована работа.

- Удельный вес посещений, сделанных сельскими жителями, не должен быть более 7%. Он свидетельствует об объеме лечебной помощи, получаемой сельскими жителями в городских больницах.
- Охват населения целевыми осмотрами для выявления туберкулеза не должен быть менее 50%, так как все трудоспособное население обязано проходить ежегодно флюорографический осмотр.
- Среднегодовая занятость койки показана в таблице.

Рекомендуемые показатели занятости койки в стационарах различного типа и профиля

№ п/п	Тип учреждения (отделения)	Работа койки (дней в год)
1	Участковые больницы	310
2	ЦРБ	310–340
3	Городские больницы	320–340
4	Специализированные стационары (отделения)	330–350
5	Родильные дома	280–300
6	Фтизиатрические стационары	350
7	Инфекционные больницы	300–310
8	Психиатрические стационары	360
9	Детские городские больницы	335
10	Детские областные больницы	335

Задания для самостоятельной работы

№ 152.

Ознакомьтесь с показателями, определяющими деятельность работы поликлиники:

1. Соблюдение принципа участковости в работе участковых врачей в поликлинике:

$$\frac{\text{Число посещений жителями участка своего участкового врача} \cdot 100\%}{\text{Число посещений, сделанных жителями р-на обслуживания пол-ки, к терапевтам}}.$$

2. Удельный вес посещений, сделанных сельскими жителями:

$$\frac{\text{Число посещений сельскими жителями терапевтов} \cdot 100\%}{\text{Общее число посещений к терапевтам}}.$$

3. Охват населения целевыми осмотрами для выявления туберкулеза:

$$\frac{\text{Число осмотренных лиц (на туберкулез)} \cdot 100\%}{\text{Численность населения}}.$$

4. Охват диспансерным наблюдением (язвенная болезнь):

$$\frac{\text{Число больных, состоящих на диспансерном учете на конец отчетного года} \cdot 100\%}{\text{Число больных, подлежащих диспансеризации}}.$$

5. Среднегодовая занятость койки:

$$\frac{\text{Число койко-дней, фактически проведенное больными в стационаре}}{\text{Число среднегодовых коек}}.$$

6. Показатель средней длительности пребывания больного на койке:

$$\frac{\text{Число койко-дней, фактически проведенное больными в стационаре}}{\text{Число выбывших больных (выписанных + умерших)}}.$$

7. Оборот койки:

$$\frac{\text{Число выбывших больных}}{\text{Число среднегодовых коек}}.$$

8. Показатель больничной летальности:

$$\frac{\text{Число умерших} \cdot 100\%}{\text{Число выбывших больных (выписанных + умерших)}}$$

и определите качественные показатели деятельности поликлиники города В., обслуживающей 50 тыс. населения. В отчете за 2005 г. указано, что жителями за год к терапевтам сделано 130 000 посещений, из них к своим участковым врачам — 90 000. Оказана медицинская помощь 8000 жителям сельских пригородов (приписанных к больнице). Проведен целевой осмотр для выявления туберкулеза — 2500 человек. Из 300 зарегистрированных больных на диспансерное наблюдение взято 150 больных язвенной болезнью желудка и двенадцатиперстной кишки. В стационаре, прикрепленном к поликлинике, 4088 больными (из них 143 умерших) проведено 65 410 койко-дней, число среднегодовых развернутых коек было 190.

№ 153.

Рассмотрите показатели деятельности работы ФАП и вычислите их для условия задачи:

1. Число посещений ФАП на 1 жителя в год:

$$\frac{\text{Число посещений ФАП на 1 жителя в год}}{\text{Число жителей}}.$$

2. Нагрузка фельдшера на приеме в час:

$$\frac{\text{Число посещений ФАП в год:}}{\text{Число отработанных часов на приеме} \cdot \text{число рабочих дней в году}}.$$

3. Нагрузка фельдшера в день:

$$\frac{\text{Число посещений в год}}{\text{Число рабочих дней в году}}.$$

4. Нагрузка фельдшера на дому в день:

$$\frac{\text{Число посещений на дому в год}}{\text{Число рабочих дней в году}}.$$

5. Удельный вес посещений на дому:

$$\frac{\text{Число посещений на дому} \cdot 100\%}{\text{Число посещений ФАП + число посещений на дому}}.$$

6. Удельный вес заболеваний ангиной:

$$\frac{\text{Число случаев ангины} \cdot 100\%}{\text{Число всех заболеваний}}.$$

7. Удельный вес заболеваний гипертонической болезнью:

$$\frac{\text{Число случаев гипертонической болезни} \cdot 100\%}{\text{Число всех заболеваний}}.$$

8. Среднее число патронажных посещений на дому к детям в возрасте до 3 лет:

$$\frac{\text{Число патронажных посещений на дому}}{\text{Число детей до 3 лет}}.$$

В году в среднем 275 рабочих дней.

Определите показатели нагрузки фельдшера и деятельности ФАП с. Покровского. В 2010 г. число жителей составляло 500 человек, детей до 3 лет — 20. Фельдшер ведет прием 3 часа в день. Число посещений к фельдшеру составило 2200, число посещений на дому — 500. Выявлено 600 заболеваний, из них 24 случая заболевания ангиной, 12 случаев гипертонической болезни. Число патронажных посещений на дому к детям до 3 лет составило 420.

№ 154.

Определите качественные показатели работы терапевтического отделения стационара городской больницы № 2 города Н. В 2010 г. в терапевтическом отделении было 130 коек. Выписано за год 2700 больных, умерло 300. Проведено в отделении всеми больными 45 500 койко-дней.

№ 155.

Определите показатели нагрузки фельдшера и деятельности ФАП с. Николаевского. В 2005 г. число жителей составляло 800 человек, детей до 3 лет — 90. На диспансерном учете находилось 25 беременных, 25 родильниц. Фельдшер ведет прием 4 часа в день. Число посещений к фельдшеру составило 3200, число посещений на дому — 1600. Выявлено 700 заболеваний, из них — 21 случай радикулита. Число патронажных посещений на дому к детям до 3 лет составило 810.

№ 156.

Определите качественные показатели работы поликлинического отделения городской больницы № 2 города Н. В 2005 г. поликлиника оказывала медицинскую помощь 30 000 жителям. Общее количество посещений к терапевтам составило 60 000, из них 12 000 сделано сельскими жителями. К своим участковым врачам обратилось 48 000 населения. Осмотрено для выявления туберкулеза — 3000. Зарегистрировано 450 больных ревматизмом, из них 450 состоят на диспансерном наблюдении.

Вопросы по теме

1. *Что такое математическая статистика?*
2. *Какие задачи решает математическая статистика?*
3. *Перечислите этапы статистического исследования.*
4. *Что изучает санитарная статистика?*
5. *Перечислите основные показатели, определяющие деятельность работы ЛПУ и ФАП.*

Тема 4.4. Статистическое определение вероятности. Выборочный метод

Термины

- Вариант выборки
- Объем выборки
- Размах выборки
- Относительная частота события
- Частота случайного события
- Полигон
- Математическое ожидание дискретной случайной величины
- Вариационный ряд

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Основными показателями выборки являются: 1) вариант; 2) объем; 3) размах; 4) частота; 5) относительная частота.

Вариант — количественное значение элемента выборки.

Объем выборки (будем обозначать буквой n) — число объектов выборки (например, если из 10 000 студентов для контрольной флюорографии отобраны 100 студентов, то объем генеральной совокупности равен 10 000, а объем выборки равен 100).

Размах выборки — разность между наибольшим и наименьшим значениями числовой выборки (буква W).

Частота значения выборки — количество данного варианта в выборке (n_i).

Относительные частоты выборки (p_i) — это отношения $\frac{n_1}{n}$, $\frac{n_2}{n}$, $\frac{n_i}{n}$.

Если из генеральной совокупности получена выборка объема n, причем x_1 появляется в ней n_1 раз, значение $x_2 - n_2$ раза и т.д. В этом случае числа $n_1, n_2, \ldots, n_i$ называют **частотами значения выборки**, а отношения $\frac{n_1}{n}$, $\frac{n_2}{n}$, $\frac{n_i}{n}$ **относительными частотами значения выборки.**

Для частот должно выполняться условие: $n_1 + n_2 + \ldots + n_i = n$, а для относительных частот

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_i}{n} = 1.$$

Вариационный ряд представляет собой неубывающую числовую последовательность. Любую числовую выборку можно записать в виде вариационного ряда.

Вариационным рядом выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ называется способ ее записи, при котором элементы упорядочиваются по величине, т.е. записываются в виде последовательности $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$, где $x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \leqslant ... x^{(n)}$.

Статистический ряд — последовательность пар (x_1,n_1), (x_2,n_2), ..., (x_i,n_i) или троек чисел (x_1, n_1, p_1), (x_2, n_2, p_2), ..., (x_i, n_i, p_i). Обычно статистический ряд записывают в виде таблицы, где x_i — значения варианта выборки, а n_i — частоты значения выборки, p_i — относительные частоты выборки.

X_1	X_2	...	X_i
n_1	n_2	...	n_i
p_1	p_2	...	p_i

Пример 1.

Дана выборка: 1, 10, –2, 0, –2, 5, 1, 10, 1, 7.

Составьте вариационный и статистический ряды.

Решение:

Вариационный ряд: –2, –2, 0, 1, 1, 1, 5, 7, 10, 10.

Статистический ряд:

X_i	–2	0	1	5	7	10
n_i	2	1	3	1	1	2
p_i	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1	0,2

Количество вариантов: 6.

Объем выборки: $n = 10$.

Размах выборки: $10 - (-2) = 12$.

Проверка: $\sum n_i = n = 10$, $\sum p_i = 1$.

Выборочное распределение записывают в виде таблицы, где x_i — значения выборки, а $\frac{n_i}{n}$ — относительные частоты значения выборки.

X_1	X_2	...	X_i
$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_i}{n}$

В математической статистике вводятся числовые характеристики выборки аналогично числовым характеристикам случайных величин в теории вероятности.

Пусть имеется выборка объема $x_1, x_2, ..., x_n$.

Выборочным математическим ожиданием (выборочным средним) называют среднее арифметическое выборки:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Если выборка задана статистическим рядом, то

$$\overline{X} = \frac{n_1 X_1 + n_2 X_2 + ... + n_n X_n}{n}.$$

Пример 2.

Дана выборка 1, 2, 3, 4, 5. Найдите выборочное среднее $\overline{X}$.

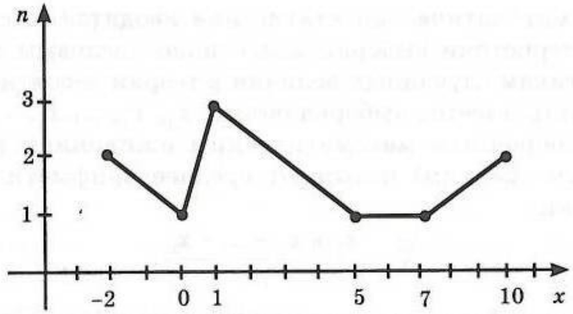
Решение:

$$\overline{X} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Графические изображения выборки

Для наглядного представления выборки часто используют различные графические изображения. Простейшими графическими изображениями выборки являются полигон и гистограмма. Пусть выборка задана статическим рядом: (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_i, n_i). **Полигоном выборки** называется ломаная линия, которая наглядно иллюстрирует статистическое распределение дискретной случайной величины. Существует два вида полигонов выборки: полигон частот (x_i, n_i) и полигон относительных частот $(x_i, \frac{n_i}{n})$.

Полигон выборки примера 1.



Полигон позволяет увидеть наибольшее (наименьшее) значение величин, динамику изменения дискретной случайной величины, разность между наибольшим и наименьшим значениями и т. д., в зависимости от того, что необходимо найти в задаче.

Задания для самостоятельной работы

№ 157.

Запишите в виде вариационного и статистического рядов выборку: 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Определите объем и размах выборки. Вычислите математическое ожидание, постройте полигон частот.

Рекомендации к выполнению задачи:

Математическая статистика позволяет получать обоснованные выводы о параметрах, видах распределений и других свойствах случайных величин по конечной совокупности наблюдений над ними — *выборке.*

Вариационным рядом выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ называется способ ее записи, при котором элементы упорядочиваются по величине, т.е. записываются в виде последовательности $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$, где $x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \leqslant ... x^{(n)}$. Разность между максимальным и минимальным элементами выборки $x^{(n)} - x^{(1)} = w$ называется *размахом выборки.*

Пусть выборка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ содержит k различных чисел $x_1, x_2, ..., x_k$ причем x_i встречается n_i раз ($i = 1, 2, ..., k$). Число n_i называется частотой элемента выборки x_i.

Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$.

Статистическим рядом называется последовательность пар $i = 1$ (x_i, n_i). Обычно статистический ряд записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит элементы x_i, а вторая — их частоты, третья строка — относительные частоты.

Для данной задачи объем выборки $n = 15$, размах выборки $w = 10 - 2 = 8$.

Упорядочив элементы выборки по величине, получим вариационный ряд:

2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10.

Различными в данной выборке являются элементы $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 7$, $x_6 = 10$; их частоты соответственно равны $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = 3$, $n_5 = 4$, $n_6 = 2$. Следовательно, статистический ряд исходной выборки можно записать в виде следующей таблицы:

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2
p_i	0,2	0,07	0,13	0,2	0,26	0,13

Для контроля правильности находим $\Sigma n_i = 15$, $\Sigma p_i = 1$.

Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Математическое ожидание можно найти по одной из трех формул:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i; \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

$$\bar{X} = \frac{1}{15}(2+2+2+3+4+4+5+5+5+7+7+7+7+10+10) \approx 5{,}3;$$

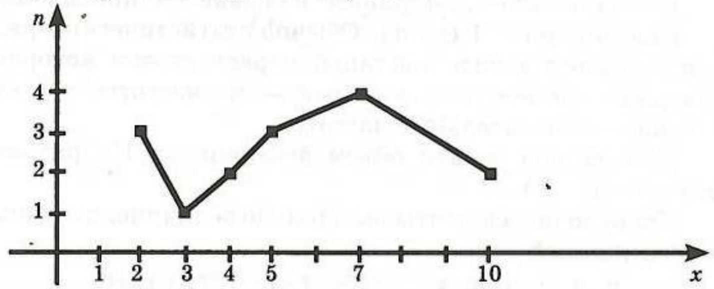
$$\bar{X} = \frac{1}{15}(2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 10 \cdot 2) \approx 5{,}3;$$

$$\bar{X} = (2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}07 + 4 \cdot 0{,}13 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}26 + 10 \cdot 0{,}13) \approx 5{,}3;$$

$$\bar{X} = (2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}07 + 4 \cdot 0{,}13 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}26 + 10 \cdot 0{,}13) \approx 5{,}3.$$

Полигон частот строится следующим образом: по горизонтали откладываем значения элементов выборки, а по вертикали — соответствующие частоты, соединяем полученные точки ломаной линией.

Для данной задачи получим:



№ 158.

В группе на занятии по статистике проводится эксперимент по регистрации номера месяца рождения каждого из студентов (опрос проводится, например, по списку группы). Постройте вариационный и статистический ряды полученной выборки. Определите объем и размах выборки. Вычислить математическое ожидание тремя способами. Постройте полигон частот.

Вопросы по теме

1. *Какой метод чаще всего используется при проведении статистического исследования?*
2. *Перечислите основные показатели выборочной совокупности, дайте им определения.*
3. *Объясните понятия: вариационный ряд и статистический ряд.*
4. *Перечислите основные выборочные характеристики. По каким формулам их можно вычислить?*
5. *Какой график называется полигоном?*

Тема 4.5. Интервальное распределение выборки. Статистические оценки параметров распределения

Термины

- Гистограмма
- Выборочное среднее
- Математическое ожидание дискретной случайной величины
- Дисперсия дискретной случайной величины
- Статистический ряд
- Среднее квадратическое отклонение

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть для изучения количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, \ldots, x_i$. Наблюдавшиеся значения x_i, признака X называют вариантами. Повторяемость признака x_i называется частотой n_i. Сумма всех частот равна n. Относительная частота — $p_i = n_i/n$ — выборочный аналог вероятности p_i появления значения x_i случайной величины X. Тогда выборочным аналогом ряда распределения естественно считать вариационный ряд.

Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная (расположенная в порядке возрастания или убывания) совокупность вариантов x_i с соответствующими им частотами n_i или относительными частотами p_i.

Аналогично полигону распределения строится полигон относительных частот. Нецелесообразно построение дискретного ряда для непрерывной случайной величины или для дискретной, число возможных значений которой велико. В подобных случаях следует построить интервальный ряд.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений величины.

При большом объеме выборки более наглядное представление дает гистограмма — ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны относительной частоте или частоте.

Построив вариационный ряд и изобразив его графически, можно получить первоначальное представление о закономерностях, имеющих место в ряду наблюдений. Однако на практике зачастую этого недостаточно. Такая ситуация возникает, например, когда имеется необходимость сравнить два ряда и более. Сравнительные распределения могут существенно отличаться друг от друга. Они могут иметь различные средние значения случайной величины или различаться рассеиванием данных наблюдений вокруг указанных значений. Поэтому для дальнейшего изучения изменения значений случайной величины используют числовые характеристики вариационных рядов. Их обычно называют статистическими характеристиками, или оценками.

Рассмотрим пример.

В результате измерения роста детей получена выборка:

118, 121, 115, 125, 125, 117, 124, 120, 120, 119, 121, 119, 122, 127, 118, 120, 123, 130, 123, 116, 124, 127, 120, 122.

Постройте гистограмму, если число частичных промежутков равно 5.

Решение:

Наименьшее значение выборки: 115.

Наибольшее значение выборки: 130.

Длина интервала $h = \dfrac{130 - 115}{5} = 3.$

Число попаданий выборки в частичные промежутки соответственно равно:

[115, 118) — 3, [118, 121) — 8, [121, 124) — 6, [124, 127) — 4, [127, 130] — 3.

Составим интервальный вариационный ряд:

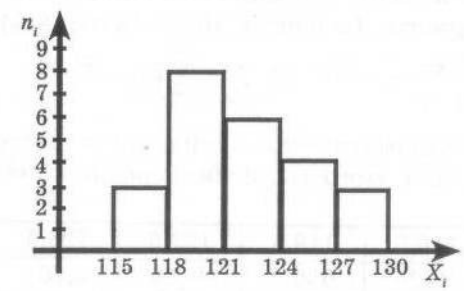
X_i	[115,118)	[118,121)	[121,124)	[124,127)	[127,130]
n_i	3	8	6	4	3
p_i	3/24	8/24	6/24	4/24	3/24

Для контроля правильности находим

$$\Sigma n_i = 24,\ \Sigma p_i = 1.$$

Для наглядного представления интервального ряда обычно строят гистограмму — столбчатую диаграмму. Гистограмма показывает значение частоты (или относительной частоты) на каждом интервале выборочной совокупности.

Строим гистограмму:



Математическое ожидание дискретной случайной величины

В математической статистике вводятся числовые характеристики выборки аналогично числовым характеристикам случайных величин в теории вероятности.

Рассмотрим выборочные характеристики для выборки объемом n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Математическое ожидание — это среднее значение случайной величины. Для дискретной случайной величины математическим ожиданием $M\ (X)$ называется сумма произведений значений случайной величины на вероятность этих значений.

Выборочным математическим ожиданием (выборочным средним) называют среднее арифметическое выборки. Математическое ожидание можно найти по одной из трех формул:

$$1)\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;\ 2)\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i;\ 3)\ \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Дисперсия дискретной случайной величины

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего. Дисперсия вычисляется по формулам:

$$1)\ D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2;\ 2)\ D = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 p_i.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию для примера 3, для этого вычислим средние значения интервала:

x_i	116,5	119,5	122,5	125,5	128,5
p_i	0,125	0,333	0,25	0,167	0,125

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i =$$

$$= 14{,}5625 + 39{,}7935 + 30{,}625 + 20{,}9585 + 16{,}0625 \approx 122.$$

Значит, среднее значение роста детей этой группы 122 см.

$$D = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 p_i =$$

$$= (116{,}5 - 122)^2 \cdot 0{,}125 + (119{,}5 - 122)^2 \cdot 0{,}333 + (122{,}5 - 122)^2 \cdot 0{,}25 + (125{,}5 - 122)^2 \cdot 0{,}167 + (128{,}5 - 122)^2 \cdot 0{,}125 \approx 13{,}25.$$

Следовательно, разброс значений роста около среднего значения составляет примерно 13 см.

Задания для самостоятельной работы

№ 159.

Изучали воздействие нового препарата на массу тела лабораторных мышей. Массы в граммах оказались равными: 64, 69, 83, 80, 70, 74, 75, 77, 77. Объем выборки $n = 9$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
64–68,75	0,12
68,75–73,50	0,22
73,50–78,25	0,44
78,25–83	0,22

Математическое ожидание $\overline{X} = 74{,}08$.

Определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере. Результаты округляйте до тысячных. Постройте гистограмму распределения частот.

Рекомендации к выполнению задачи.

Поместим результаты вычислений в таблицу:

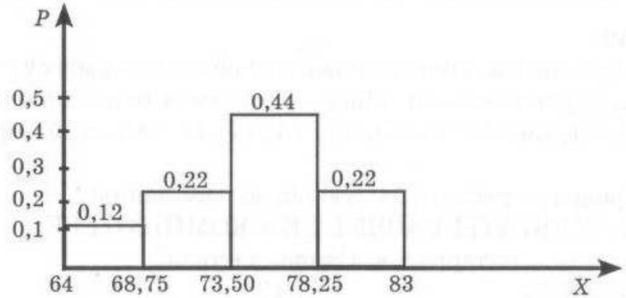
Номер интервала	Границы интервала	Середина интервала x_i	Относительная частота p_i	$x_i p_i$
1	64–68,75	66,375	0,12	7,965
2	68,75–73,50	71,125	0,22	15,648
3	73,50–78,25	75,875	0,44	33,385
4	78,25–83	80,625	0,22	17,738

Математическое ожидание находим по формуле

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 7{,}965 + 15{,}648 + 33{,}385 + 17{,}738 = 74{,}736.$$

Математическое ожидание, найденное на компьютере, точно не совпадает по значению с тем, которое найдено по формуле, но приблизительно равно. Небольшие неточности допускаются вследствие округления большого количества чисел.

Построим гистограмму распределения частот, откладывая по оси абсцисс ширину интервала, а по оси ординат — относительную частоту встречаемости.



№ 160.

Вариант 1.

Изучали среднее артериальное давление в начальной стадии шока (мм рт. ст.). Объем выборки $n = 15$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
89–94	0,06
94–99	0,34
99–104	0,4
104–109	0,2

Математическое ожидание $\overline{X} = 99{,}86$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 2.

Изучали среднее артериальное давление в конечной стадии шока (мм рт. ст.). Объем выборки $n = 15$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
51–57	0,14
57–63	0,4
63–69	0,26
69–75	0,2

Математическое ожидание $\overline{X} = 63{,}46$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 3.

Изучали рост мужчин 25 лет (см) для городской местности.

Объем выборки $n = 19$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
160–164	0,1
164–168	0,15
168–172	0,37
172–176	0,28
176–180	0,1

Математическое ожидание $\overline{X} = 170{,}15$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 4.

Изучали среднюю длительность пребывания больного на койке в стационаре (в ч).

Объем выборки $n = 21$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
161–165	0,06
165–169	0,19
169–173	0,47
173–177	0,19
177–181	0,09

Математическое ожидание $\overline{X} = 171{,}42$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 5.

Изучали воздействие определенной физиопроцедуры на частоту сердечных сокращений (уд./мин) у группы испытуемых. Объем выборки $n = 18$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
67–68,2	0,09
68,2–69,4	0,16
69,4–70,6	0,44
70,6–71,8	0,22
71,8–73	0,09

Математическое ожидание $\overline{X} = 70{,}16$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 6.

Изучали среднее артериальное давление в постинфарктном состоянии (мм рт.ст.). Объем выборки $n = 23$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
59–70	0,17
70–81	0,26
81–92	0,24
92–103	0,20
103–114	0,13

Математическое ожидание $\overline{X} = 85{,}04$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 7.

Изучали среднее артериальное давление у больных с пониженным гемоглобином в крови (мм рт. ст.). Объем выборки $n = 23$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
60–70	0,11
70–80	0,21
80–90	0,14
90–100	0,20
100–110	0,13
110–120	0,21

Математическое ожидание $\overline{X} = 85{,}04$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 8.

Изучали охват диспансерным наблюдением у населения по годам. Объем выборки $n = 9$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
30–40	0,12
40–50	0,32
50–60	0,42
60–70	0,14

Математическое ожидание $\overline{X} = 50{,}80$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 9.

Изучали систолическое давление в начальной стадии шока (мм рт. ст.) у людей, оставшихся в живых. Объем выборки $n = 21$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
93–105	0,07
105–117	0,28
117–129	0,33
129–141	0,23
141–153	0,09

Математическое ожидание $\overline{X} = 123{,}95$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 10.

Изучали систолическое давление в начальной стадии шока (мм рт. ст.) у людей, умерших после шока. Объем выборки $n = 12$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
79–90	0,16
90–101	0,26
101–112	0,33
112–123	0,25

Математическое ожидание $\overline{X} = 101{,}83$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 11.

Изучали среднее артериальное давление в начальной стадии шока (мм. рт. ст.). Объем выборки $n = 15$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
85–90	0,06
90–95	0,34
95–100	0,4
100–105	0,2

Математическое ожидание $\overline{X} = 92{,}45$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 12.

Изучали среднее артериальное давление в конечной стадии шока (мм. рт. ст.).

Объем выборки $n = 15$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
50–55	0,14
55–60	0,4
60–70	0,26
70–75	0,2

Математическое ожидание $\overline{X} = 64{,}51$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 13.

Изучали рост мужчин 25 лет (см) для городской местности. Объем выборки $n = 19$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
165–170	0,1
170–175	0,15
175–180	0,37
180–185	0,28
185–190	0,1

Математическое ожидание $\overline{X} = 182{,}43$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 14.

Изучали среднюю длительность пребывания больного на койке в стационаре (в ч).

Объем выборки $n = 21$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
120–125	0,06
125–130	0,19
130–135	0,47
135–140	0,19
140–145	0,09

Математическое ожидание $\overline{X} = 171{,}42$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 15.

Изучали воздействие определенной физиопроцедуры на частоту сердечных сокращений (уд./мин) у группы испытуемых. Объем выборки $n = 18$.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
60–63	0,09
63–66	0,16

66–69	0,44
69–72	0,22
72–75	0,09

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 67,29.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 16.

Изучали среднее артериальное давление в послеинфарктном состоянии (мм. рт. ст.). Объем выборки n = 23.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
60–70	0,17
70–80	0,26
80–90	0,24
90–100	0,20
100–110	0,13

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 86,74.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 17.

Изучали среднее артериальное давление у больных с пониженным гемоглобином в крови (мм. рт. ст.). Объем выборки n = 23.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
80–85	0,11
85–90	0,21
90–95	0,14
95–100	0,20
100–105	0,13
105–110	0,21

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 95,64.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 18.

Изучали охват диспансерным наблюдением у населения по годам.

Объем выборки n = 9.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
40–50	0,12
50–60	0,32
60–70	0,42
70–80	0,14

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 61,45.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 19.

Изучали систолическое давление в начальной стадии шока (мм. рт. ст.) у людей, оставшихся в живых. Объем выборки n = 21.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
100–110	0,07
110–120	0,28
120–130	0,33
130–140	0,23
140–150	0,09

Математическое ожидание $\overline{X}$ = 122,35.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

Вариант 20.

Изучали систолическое давление в начальной стадии шока (мм. рт. ст.) у людей, умерших после шока. Объем выборки n = 12.

Провели статистическую обработку данных.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НА КОМПЬЮТЕРЕ:

Границы интервалов:	Относ. частота:
120–130	0,16
130–140	0,26

140–150	0,33
150–160	0,25

Математическое ожидание $\overline{X} = 142{,}64$.

Постройте гистограмму распределения частот, определите математическое ожидание и сравните его с найденным на компьютере.

№ 161.

Для следующих условий задач вычислите математическое ожидание (выборочное среднее), дисперсию дискретной случайной величины.

Вариант 1.

В результате 10 одинаковых проб были получены следующие значения содержания марганца: 0,69%; 0,70%; 0,67%; 0,66%; 0,69%; 0,67%; 0,68%; 0,67%; 0,68%; 0,68%.

Вариант 2.

При определении микроаналитическим способом содержания азота в данной пробе были получены следующие результаты: 9,29%; 9,38%; 9,35%; 9,43%; 9,53%; 9,48%; 9,61%; 9,68%.

Вариант 3.

В результате измерений диаметра капилляра в стенке легочных альвеол были получены следующие данные: 2,83 мкм; 2,81 мкм; 2,85 мкм; 2,87 мкм; 2,86 мкм; 2,83 мкм; 2,85 мкм; 2,83 мкм; 2,84 мкм.

Вариант 4.

По результатам экспериментов были получены следующие показатели активности таблеток пенталгина: 3,2; 3,4; 3,3; 3,5; 3,6; 3,7; 3,4; 3,3; 3,4; 3,7; 3,2.

Вариант 5.

При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11, 6, 9, 8, 10, 7.

Вариант 6.

Проведены измерения вязкости крови у 9 больных. Значения относительной вязкости крови у больных составили: 5, 4, 3, 2, 6, 3, 4, 8, 10.

Вариант 7.

На группе лабораторных мышей изучали воздействие на организм нового препарата. После месячных испытаний масса тела грызунов, выраженная в граммах, варьировала следующим образом: 80, 76, 75, 64, 70, 68, 72, 79, 83.

Вариант 8.

По результатам экспериментов были получены следующие показатели активности таблеток тетрациклина: 10,1; 10,5; 10,4; 10,4; 10,8; 10,1; 10,5; 10,2; 10,4; 10,7.

Вариант 9.

Взяли кровь на анализ у больных, лежавших в одном отделении больницы. По результатам получили количество лейкоцитов в крови (в тыс.) в 1 мм^3: 3,5; 4,5; 8,1; 7,5; 10,6; 5,6; 6,2; 8,3; 9,7; 11,4. У здорового человека норма 4–9 тыс. лейкоцитов в 1 мм^3.

Вариант 10.

Жизненная емкость легких у больных, состоявших на диспансерном учете, составила: 2,5 л; 3,2 л; 4,5 л; 2,7 л; 5,1 л; 3,8 л; 3,6 л; 4,2 л; 4,3 л; 3,1 л.

№ 162.

Дано время недельной нагрузки компьютеров в 50 учебных заведениях:

38	60	41	51	33	42	45	21	53
60	60	52	47	46	49	49	14	57
54	59	77	47	48	48	58	32	42
58	61	30	61	35	47	72	41	45
44	56	30	40	67	65	39	48	43
60	54	42	59	50				

Найдите размах выборки, число и длину интервалов, максимальное и минимальное значения элементов выборки, а также составьте таблицу частот (запишите группированное статистическое распределение). Принять первый интервал 14–23. Вычислите математическое ожидание двумя различными способами, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. Постройте гистограмму частот.

Рекомендации к выполнению задачи:
Максимальный элемент выборки — 77.
Минимальный элемент выборки — 14.
Размах выборки $w = 77 - 14 = 63$.
Длина одного интервала $23 - 14 = 9$.
Количество интервалов $63/9 = 7$.
Результаты группировки сводим в таблицу частот.

Номер интервала	Границы интервала	Середина интервала x_i	Частота n_i	Относительная частота $P_i = n_i / n$	$x_i p_i$	$x_i n_i$	$(x_i - \overline{X})^2$
1	14–23	18,5	2	0,04	0,74	37	892,8
2	23–32	27,5	3	0,06	1,65	82,5	436,0
3	32–41	36,5	6	0,12	4,38	219	141,1
4	41–50	45,5	18	0,36	16,38	819	8,3
5	50–59	54,5	10	0,2	10,9	545	37,5
6	59–68	63,5	9	0,18	11,43	571,5	228,6
7	68–77	72,5	2	0,04	2,9	145	581,8
			$\Sigma = 50$	$\Sigma = 1$	Σ=48,38	Σ=2419	Σ=2326,1

Математическое ожидание можно вычислить различными способами:

$$1)\ \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i;\quad 2)\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\, n_i;\quad 3)\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Для первого способа $\overline{X} = 48{,}38$, для второго

$$\overline{X} = 2419 / 50 \approx 48{,}38.$$

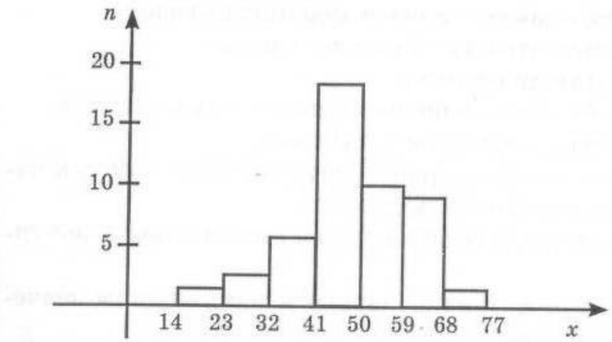
Дисперсия вычисляется по формуле

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 = \frac{2326{,}1}{50} = 46{,}5.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{46{,}5} = 6{,}8.$$

Для данного примера гистограмма частот будет выглядеть следующим образом:



№ 163.

Составьте выборочную совокупность измерения роста детей подросткового возраста из 40 элементов (120 см – 150 см). Найдите размах выборки, максимальное и минимальное значения. Разбейте выборку на 6 интервалов и составьте таблицу частот. Вычислите математическое ожидание (двумя способами), дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Постройте гистограмму распределения частот.

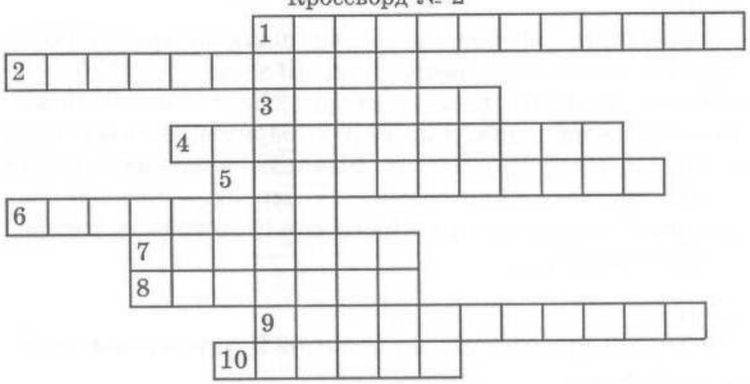
№ 164.

Отгадав кроссворды, вы прочтете в выделенном столбце название раздела математики.

Кроссворд № 1

1. Рассеяние случайной величины.
2. Параметр, характеризующий какую-либо величину.
3. Обработка данных с последующим выводом.
4. Прерывистость случайной величины.
5. Столбчатая диаграмма.
6. Набор объектов, собранных по одному признаку.
7. Количество вариантов в выборке.
8. Ломаная линия, характеризующая зависимость частоты от случайной величины.
9. Набор выбранных объектов из генеральной совокупности.
10. Разность между наибольшим и наименьшим значениями выборки.

Кроссворд № 2



1. Набор объектов, собранных по одному признаку.
2. Параметр, характеризующий какую-либо величину.
3. Обработка данных с последующим выводом.
4. Прерывистость.
5. Столбчатая диаграмма.
6. Организованное статистическое наблюдение в пределах страны.
7. Количество вариантов в выборке.
8. Ломаная линия, характеризующая зависимость частоты от случайной величины.
9. Численное значение показателя.
10. Разность между наибольшим и наименьшим значениями выборки.

№ 165.

Выполните тестовые задания.

1. Количество способов составления списка из 5 человек равно:
   1) 120; 2) 5;
   3) 1; 4) 2.

2. В ящике 4 черных и 6 белых шаров. Из него случайным образом берут один шар. Вероятность того, что этот шар окажется черным, равна:
   1) 0,4; 2) 0,6;
   3) 0,2; 4) 1.

3. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины X имеет вид:

X	2	5	8
P	0,1	p_2	0,6

   Тогда вероятность p_2 равна:
   1) 0,3; 2) 0,7;
   3) 0; 4) 0,5.

4. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения, равно:

X	2	5	8
P	0,2	0,3	0,5

   1) 5,9; 2) 5;
   3) 15; 4) 1.

5. По цели произведено 10 выстрелов, зарегистрировано 7 попаданий, тогда относительная частота попадания в цель равна:
   1) 0,7; 2) 0,35;
   3) 0,5; 4) 0,3.

6. По данному распределению выборки значение выборочной средней равно:

x_i	2	5	8
n_i	1	4	5

1) 3,9; 2) 3,5;
3) 4; 4) 3.

7. Вероятность появления одного из двух несовместных событий A и B (безразлично какого), вероятности которых соответственно $P(A)=0{,}4$ и $P(B)=0{,}3$, равна:
1) 0,7; 2) 0,12;
3) 0,1; 4) 0,3.

8. Если вероятность попадания в мишень составляет 0,3, тогда вероятность промаха равна:
1) 0,7; 2) 0,3;
3) 0,5; 4) 1,3.

9. Невозможными являются следующие два события:
1) появление 10 очков при бросании игральной кости;
2) появление 19 очков при бросании трех игральных костей;
3) появление 10 очков при бросании трех игральных костей;
4) появление 15 очков при бросании трех игральных костей.

10. Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать трех лиц на три одинаковые должности?
1) 56; 2) 336;
3) 3; 4) 8.

11. Если вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,4; вторым — 0,5, тогда вероятность поражения цели обоими стрелками равна:
1) 0,2; 2) 0,9;
3) 0,45; 4) 0,1.

12. Составьте закон распределения случайной величины X — числа выигравших лотерейных билетов из двух купленных, если вероятность выигрыша любого лотерейного билета равна 0,1, сопоставляя значения случайной величины и их вероятности.
1. $X=0$ 2. $X=1$ 3. $X=2$
1) 0,81; 2) 0,18; 3) 0,01.

13. Дискретная случайная величина X принимает два возможных значения: $x_1=2$ с вероятностью 0,4 и x_2 с вероятностью p_2. Если математическое ожидание $M(X)=5$, тогда x_2 равно:
1) 7; 2) 0,6;
3) 3,6; 4) 2,5.

14. По цели произведено 20 выстрелов, зарегистрировано 18 попаданий, тогда относительная частота попадания в цель равна:
1) 0,9; 2) 0,18;
3) 0,5; 4) 0,1.

15. Дисперсия случайной величины, заданной законом распределения, равна:

X	0	1	2
P	0,5	0,2	0,3

1) 0,76; 2) 0,8;
3) 1,4; 4) 2,04.

16. Вероятности событий A и B соответственно равны $P(A)=0{,}4$ и $P(B)=0{,}5$. Установите соответствие между вероятностями указанных событий и их значениями.
1) Вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий A и B.
2) Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B.
3) Вероятность события, противоположного событию A.
1) 0,9;
2) 0,2;
3) 0,6.

17. Теория вероятности – это:
1) Раздел математики, изучающий связи между вероятностями случайных событий.
2) Раздел математики, изучающий связи между экспериментальными данными.
3) Раздел математики, изучающий связи между методами систематизации.
4) Раздел математики, изучающий связи между функциями.

18. В ящике 3 желтых и 7 синих шаров. Из ящика случайным образом берут один шар. Вероятность того, что этот шар окажется желтым, равна:

1) 100%; 2) 0,3;
3) 0,7; 4) 0,5.

19. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения, равно:

X	1	2	3
P	0,3	0,1	0,6

1) 6; 2) 2,1;
3) 2,3; 4) 2.

20. В ящике 2 белых и 8 черных шаров. Из ящика случайным образом берут один шар. Вероятность того, что этот шар окажется белым, равна:
1) 1; 2) 0,5;
3) 0,2; 4) 0,8.

21. Если математическое ожидание квадрата случайной величины, заданной законом распределения, равно $M(X^2) = 2{,}3$, тогда дисперсия равна:

X	–2	0	1
P	0,5	0,2	0,3

1) 1,81; 2) 2;
3) 0,7; 4) 1,7.

22. По данному распределению выборки значение выборочной средней равно:

x_i	4	7	8
n_i	3	2	5

1) 6,6; 2) 6;
3) 7; 4) 6,3.

23. В ящике 8 красных и 12 зеленых шаров. Из ящика случайным образом берут один шар. Вероятность того, что этот шар окажется красным, равна:
1) 0,6%; 2) 1%;
3) 0,2%; 4) 0,4%.

24. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения, равно:

X	1	3	6
P	0,2	0,3	0,5

1) 10; 2) 4,1;
3) 3,9; 4) 2.

25. Полигон — это:
1) график функции;
2) графическое изображение интервального ряда распределения;
3) графическое изображение дискретного ряда распределения;
4) графическое изображение отношения частоты к относительной частоте.

26. В ящике 3 желтых и 7 синих шаров. Из ящика случайным образом берут один шар. Вероятность того, что этот шар окажется желтым, равна:
1) 100%; 2) 0,3%;
3) 0,7%; 4) 0,5%.

27. Математическая статистика — это:
1) раздел математики, изучающий связи между случайными величинами;
2) раздел математики, посвященный методам систематизации, обработки и исследования статистических данных;
3) раздел математики, изучающий связи между методами систематизации;
4) раздел математики, изучающий связи между функциями.

28. Гистограмма — это:
1) график функции;
2) графическое изображение интервального ряда распределения;
3) графическое изображение дискретного ряда распределения;
4) графическое изображение отношения частоты к относительной частоте.

29. Математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения, равно:

X	4	5	6
P	0,4	0,1	0,5

1) 15; 2) 5,1;
3) 4; 4) 6.

30. Выборка — это:
1) множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности;
2) множество объектов, однородных относительно нескольких признаков;
3) множество объектов, однородных относительно одного признака;
4) множество объектов, собранных по одному признаку.

Вопросы по теме

1. Какие виды графиков используются для графического представления выборки?
2. Что такое группированное статистическое распределение?
3. Дайте определение основным характеристикам выборочного распределения.
4. Где находят применение статистические расчеты?
5. В чем существенное отличие статистического и интервального распределения выборки?

Тема 4.6. Медико-демографические показатели

Термины

- Демография
- Медико-демографические показатели
- Показатель рождаемости
- Показатель смертности
- Естественный прирост

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Медико-демографические показатели

Демография (от греч. *dēmos* — народ и ...графия) — наука о народонаселении, о закономерностях воспроизводства населения в общественно-исторической обусловленности этого процесса. По материалам статистики демография изучает воспроизводство населения в целом и его компоненты как массовые социальные процессы, их количественные взаимосвязи с возрастно-половой структурой населения, зависимости от социальных и экономических явлений, характер взаимодействия роста населения с общественным развитием. Применяя статистические, математические и, собственно, демографические методы, разрабатываются теория воспроизводства населения, демографические прогнозы, обосновывается демографическая политика страны.

Основными медико-демографическими показателями являются рождаемость, смертность, естественный прирост населения.

Коэффициентом (или показателем) рождаемости называется число родившихся за год, приходящееся на 1000 населения. **Коэффициентом общей смертности** служит количество умерших за год на 1000 населения.

Естественный прирост населения можно установить лишь при одновременном изучении рождаемости и смертности в их взаимной связи. **Показатель естественного прироста** определяется путем вычисления разности между показателями рождаемости и смертности населения.

Показатели измеряются в промилле (тысячная часть), обозначаются ‰.

По оценке Федеральной службы государственной статистики (Росстата), численность постоянного населения Российской Федерации на 1 августа 2009 г. составляла 141,9 млн человек и с начала года уменьшилась на

31,5 тыс. человек, или на 0,02%, а на соответствующую дату предыдущего года — на 125,1 тыс. человек, или на 0,09%.

1 октября 2009 г. стало известно, что Росстат, в ходе подготовки отложенной переписи 2010 г., обнаружил, что текущая численность населения России может составить 140 млн человек, что на 2 млн меньше расчетной цифры. По обнародованным в начале октября того же года данным доклада Программы развития ООН страна, население которой сократилась на 6,6 млн человек с 1993 г., потеряет к 2025 г. еще 11 млн.

Согласно ежегодному Докладу Фонда ООН в области народонаселения за 2004 г., в России продолжается демографический кризис.

Рост населения в стране прекратился с 1991 г. (рождаемость в РСФСР упала ниже уровня простого замещения поколений еще в 1960-е гг.). Смертность в 1,5 раза превышает рождаемость, население сокращается на несколько сотен тысяч человек ежегодно.

Негативной особенностью России является тот факт, что в результате демографического перехода рождаемость упала до уровня развитых стран, в то время как смертность достигла уровня развивающихся.

По мнению некоторых демографов, падение смертности в результате развития здравоохранения компенсировалось с 1960-х гг. ростом алкогольной смертности. Алкогольная смертность в России (600–700 тыс. человек в год) связана с самым высоким в мире уровнем потребления легальных и нелегальных алкогольных напитков. Она покрывает собой большую часть разрыва между рождаемостью и смертностью, обусловливающего депопуляцию России.

Этому мнению никак не противоречит мнение некоторых других демографов, которые считают, что высокая смертность связана с незавершенностью процессов модернизации России, включая социокультурный аспект. В частности, забота о собственном здоровье не является высокой ценностью в рамках менталитета существенной части населения, что предопределяет высокую алкоголизацию, смертность от несчастных случаев (включая ДТП), аномальную распространенность ряда болезней и др.

Сокращение численности населения несколько сдерживается иммиграцией, в первую очередь этнических русских и русскоязычных из стран СНГ (Казахстан, Средняя Азия и Закавказье), однако к настоящему времени эти резервы сокращаются. Россия не смогла в полной мере воспользоваться благоприятной конъюнктурой и стремлением соотечественников вернуться в Россию (во многом из-за негибкой иммиграционной политики).

Перепись населения

Перепись населения — это организация сбора, обработки и публикации демографических, экономических и социальных данных обо всем населении, проживающем в определенный момент времени в стране.

Принципы переписи:

1. Всеобщность охвата населения.
2. Непосредственное получение сведений от населения путем опроса конкретных лиц.
3. Самоопределение людей при ответах на вопросы, т. е. перепись проводится только по ответам самих опрашиваемых, без предъявления ими документов.
4. Конфиденциальность сообщаемых населением сведений.

Точность и сопоставимость всех данных, полученных при переписи, обеспечиваются:

1) проведением переписи по единой программе и правилам на всей территории страны;
2) сбором сведений на одну дату, на одно и то же точное время — момент счета населения;
3) результаты переписи публикуются только в виде сводных таблиц (принцип конфиденциальности).

По данным переписи населения 2002 г. численность населения России с 1989 по 2002 г. упала на 2,8 млн. В настоящее время каждую минуту в России рождаются 3 человека, а умирают — 4. Общемировая тенденция противоположна: отношение количества рождений к смертям равно 2,6. Особенно велика смертность у российских мужчин, средняя продолжительность жизни которых 61,4 года, что связано, в частности, с высоким уровнем потребления крепких алкогольных напитков, большим количеством несчастных случаев, убийств и самоубийств. Продолжительность жизни женщин значительно выше — 73,9 года. Уровень рождаемости в России не обеспечивает простого воспроизводства населения.

Далее представлены материалы всероссийской переписи населения 2010 г., данные взяты с сайта www. http://www.perepis-2010.ru/results_of_the_census/results-inform.php, Федеральная государственная служба статистики.

Представленные итоги интересны не только численными показателями, но и разнообразием диаграмм, с которыми должны уметь работать медицинские работники среднего звена.

Рассмотрим некоторые итоги Всероссийской переписи населения 2010 г., полученные в результате автоматизированной обработки переписных листов Федеральной службой государственной статистики.

1. Численность и размещение населения

По данным Всероссийской переписи населения, проведенной по состоянию на 14 октября 2010 года, численность постоянного населения Российской Федерации составила 142,9 млн человек.

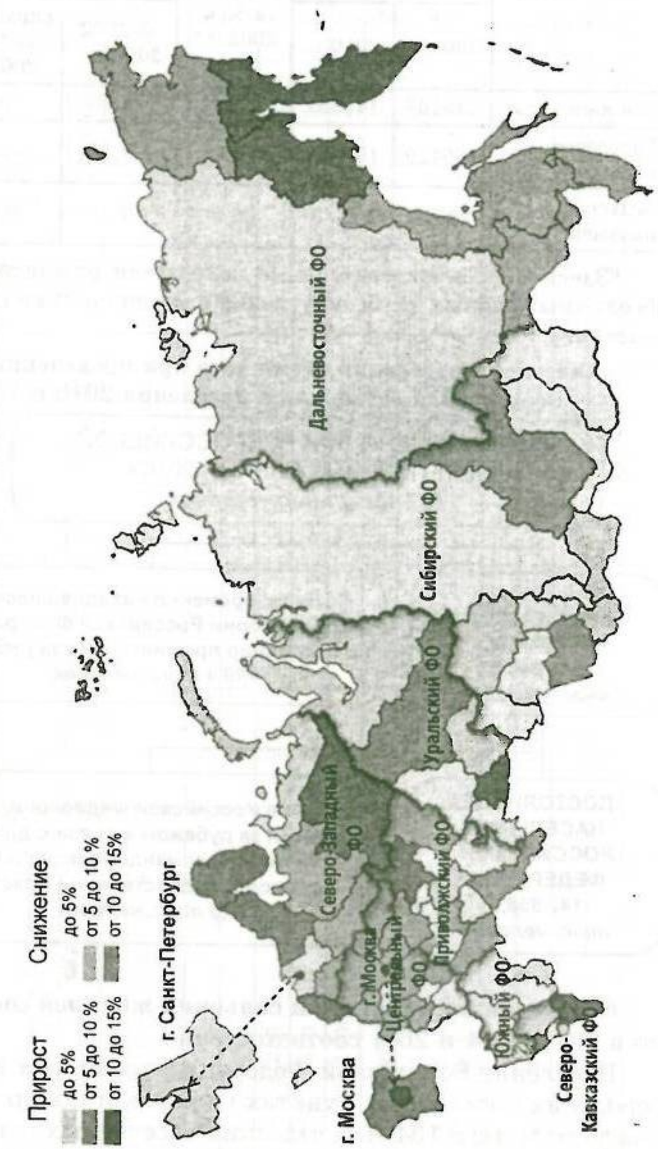
При переписи было учтено 90 тыс. граждан Российской Федерации, находящихся на дату переписи за рубежом в связи с длительной служебной командировкой по линии органов государственной власти и проживающих с ними членов их домохозяйств (в 2002 г. 107 тыс.).

Кроме того, при переписи было учтено 489 тыс. человек, временно (менее 1 года) находившихся на территории Российской Федерации и постоянно проживающих за рубежом (в 2002 г. – 239 тыс. человек).

Российская Федерация занимает восьмое место в мире по численности населения после Китая (1335 млн человек), Индии (1210 млн человек), США (309 млн человек), Индонезии (238 млн человек), Бразилии (191 млн человек), Пакистана (165 млн человек) и Бангладеш (147 млн человек).

По сравнению с переписью населения 2002 г. численность населения уменьшилась на 2,3 млн человек, в том числе в городских населенных пунктах – на 1,1 млн человек, в сельской местности – на 1,2 млн человек.

Изменение численности населения в субъектах Российской Федерации между переписями населения 2002 и 2010 гг.



	Тысяч человек		2010 г. в % к 2002 г.*	Среднегодовые темпы сокращения, в %	
	2002 г.	2010 г.		за 2002 2010 гг.	справочно, за 1989-2002 гг.
Все население	145167	142857	98,4	–0,20	–0,09
Городское население	106429	105314	99,0	–0,13	–0,10
Сельское население	38738	37543	96,9	–0,39	–0,06

*Здесь и далее относительные показатели рассчитаны из абсолютных данных до их округления в тысячи или миллионы человек.

Категории населения, учтенного при проведении Всероссийской переписи населения 2010 г.

ВСЕГО УЧТЕНО ПРИ ВСЕРОССИЙСКОЙ ПЕРЕПИСИ НАСЕЛЕНИЯ 2010 г.
143 436,2 тыс. человек

НАСЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
142 946,8 тыс. человек

Лица, временно находившиеся на территории Российской Федерации, но постоянно проживающие за рубежом
489,4 тыс. человек

ПОСТОЯННОЕ НАСЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
142 856,5 тыс. человек

Граждане Российской Федерации, находившиеся за рубежом в связи с длительной служебной командировкой по линии органов государственной власти
90,3 тыс. человек

Соотношение горожан и сельских жителей составило в 2010 г. 74 и 26% соответственно.

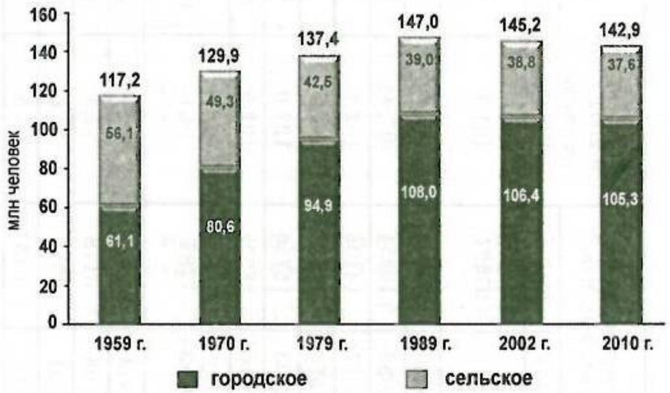
Население Российской Федерации проживает в 2386 городских населенных пунктах (городах и поселках городского типа) и 134 тыс. сельских населенных пунктах.

Изменения в размещении городского населения характеризуются следующими данными:

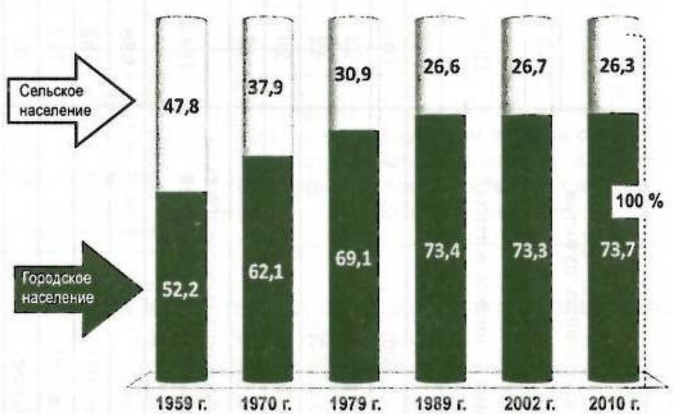
Группировка городских населенных пунктов	Число городских населенных пунктов		Число жителей в них, тыс. чел.		2010 г. в % к 2002 г. по числу жителей	Число жителей, в % к итогу	
	2002 г.	2010 г.	2002 г.	2010 г.		2002 г.	2010 г.
Всего городов, из них с числом жителей (тыс. чел.):	1098	1100	95916	97527	101,7	100	100
до 50	768	781	16623	16445	98,9	17,3	16,9
от 50 до 100	163	155	11083	10854	97,9	11,6	11,1
от 100 до 250	92	91	13817	14105	102,1	14,4	14,5
от 250 до 500	42	36	14574	12146	83,3	15,2	12,4
от 500 до 1000	20	25	12403	15755	127,0	12,9	16,2
1000 и более	13	12	27416	28222	102,9	28,6	28,9
Всего поселков городского типа, из них с числом жителей (тыс. чел.):	1842	1286	10513	7787	74,1	100,0	100,0
до 5	988	626	2543	1680	66,1	24,2	21,6
от 5 до 10	582	455	4108	3178	77,3	39,1	40,8
от 10 до 20	247	180	3231	2314	71,6	30,7	29,7
20 и более	25	25	631	615	97,5	6,0	7,9

В городах проживает 93% городского населения (в 2002 г. – 90%), остальное городское население живет в поселках городского типа.

Изменение численности постоянного населения (по данным переписей), млн человек



Соотношение городского и сельского населения Российской Федерации, %



Размещение сельского населения характеризуется следующими данными:

Группировка сельских населенных пунктов	Число сельских населенных пунктов, тыс.		Число жителей в них, тыс. чел.		2010 г. в % к 2002 г. по числу жителей	Число жителей в % к итогу	
	2002 г.	2010 г.	2002 г.	2010 г.		2002 г.	2010 г.
Всего сельских населенных пунктов с населением из них с числом жителей (чел.):	142,2	133,7	38738	37543	96,9	100	100
1–10	34,0	36,2	168	167	99,4	0,4	0,4
11–50	38,1	32,7	950	818	86,1	2,5	2,2
51–100	14,9	13,8	1082	1006	93,0	2,8	2,7
101–500	36,3	33,4	8920	8187	91,8	23,0	21,8
501–1000	10,8	9,7	7571	6779	89,5	19,5	18,1
1001–3000	6,4	6,0	9996	9439	94,4	25,8	25,1
3001 и более	1,7	1,9	10051	11147	110,9	26,0	29,7

За межпереписной период число сельских населенных пунктов уменьшилось на 8,5 тыс. сел и деревень. Это произошло за счет включения сельских населенных пунктов в черту городов и поселков городского типа, а также их ликвидации по решениям местных органов власти в связи с естественной убылью и миграционным оттоком населения в другие населенные пункты. Вместе с тем при переписи было зафиксировано 19,4 тыс. сельских населенных пунктов, в которых население фактически не проживало. По сравнению с прошлой переписью число таких населенных пунктов увеличилось на 48%.

2. Размещение населения по территории Российской Федерации

Численность населения по федеральным округам изменилась следующим образом:

	Все население, млн чел.		В % к итогу	
	2002 г.	2010 г.	2002 г.	2010 г.
Российская Федерация	145,2	142,9	100	100
Центральный федеральный округ	38,0	38,4	26,2	26,9
Северо-Западный федеральный округ	14,0	13,6	9,6	9,5
Южный федеральный округ	14,0	13,9	9,6	9,7
Северо-Кавказский федеральный округ	8,9	9,4	6,2	6,6
Приволжский федеральный округ	31,1	29,9	21,5	20,9
Уральский федеральный округ	12,4	12,1	8,5	8,5
Сибирский федеральный округ	20,1	19,3	13,8	13,5
Дальневосточный федеральный округ	6,7	6,3	4,6	4,4

3. Возрастно-половой состав

По данным переписи населения 2010 г. численность женщин превышает численность мужчин на 10,8 млн человек. В 2002 г. это превышение составляло 10,0 млн человек.

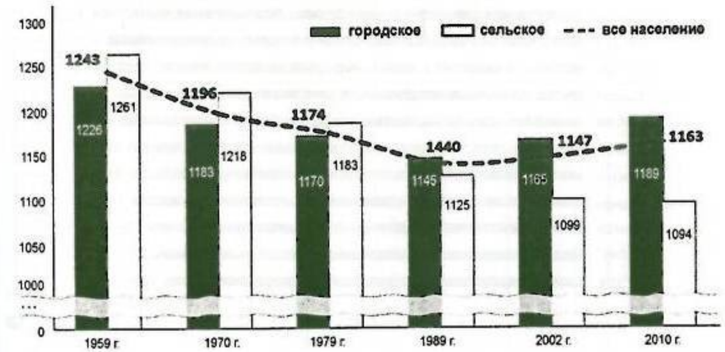
	Млн человек				2010 г. в % к 2002 г.		Доля мужчин в общей численности населения, %	
	Мужчины		Женщины					
	2002 г.	2010 г.	2002 г.	2010 г.	Мужчины	Женщины	2002 г.	2010 г.
Все население	67,6	66,1	77,6	76,8	97,7	99,0	46,6	46,2
Городское население	49,1	48,1	57,3	57,2	97,9	99,9	46,2	45,7
Сельское население	18,5	18,0	20,3	19,6	97,1	96,7	47,6	47,8

На 1000 мужчин в 2010 г. приходилось 1163 женщины, в 2002 г.– 1147.

По данным переписи 2010 г. преобладание численности женщин над численностью мужчин отмечается с 30-летнего возраста (в 2002 г. – с 33-летнего возраста).

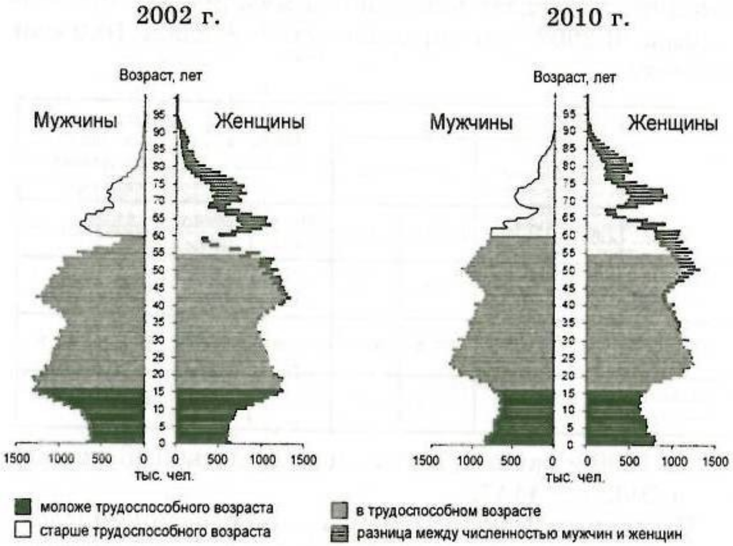
Заметные изменения произошли в возрастном составе населения.

Число женщин на 1000 мужчин

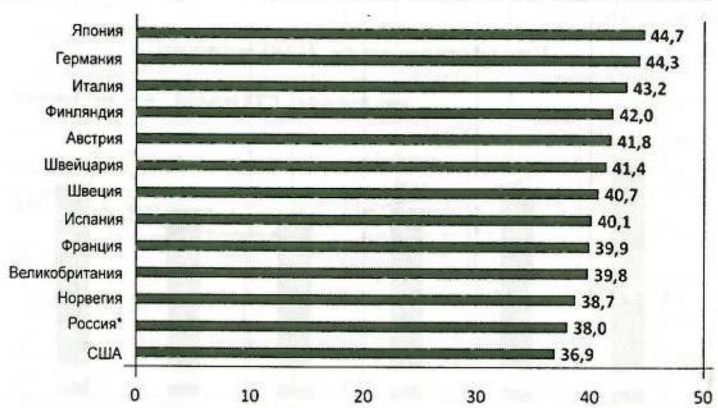


По итогам Всероссийской переписи населения 2010 г. средний возраст жителей страны составил 39 лет (в 2002 г. – 37,7 лет).

Возрастно-половая пирамида наглядно иллюстрирует произошедшие изменения в межпереписной период.



Медианный возраст населения по отдельным странам, лет



По данным Всероссийской переписи населения 2010 г.: медианный возраст — 38 лет., средний возраст — 39 лет. Источник информации по другим странам — World Population Prospects. The 2010 Revision.

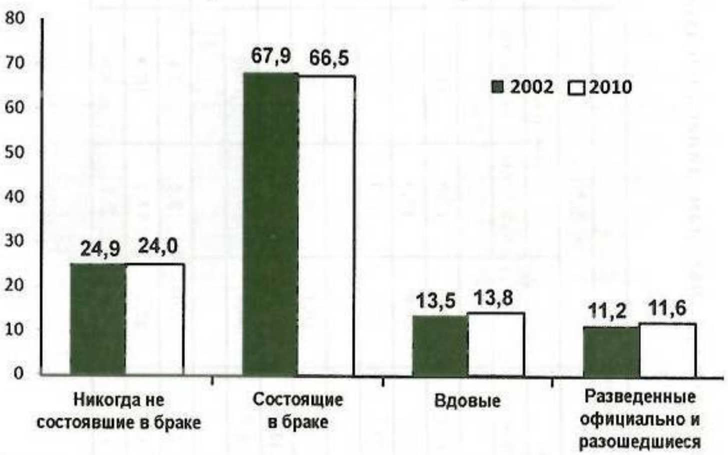
Численность населения по основным возрастным группам изменилась следующим образом:

	Млн человек						Доля в общей численности населения, %	
	2002 г.			2010 г.			2002 г.	2010 г.
	Оба пола	в том числе мужчины	в том числе женщины	Оба пола	в том числе мужчины	в том числе женщины		
Все население в возрасте:							100	100
моложе трудоспособного	26,3	13,4	12,9	23,1	11,8	11,3	18,1	16,2
трудоспособном	89,0	44,8	44,2	88,0	45,3	42,7	61,3	61,6
старше трудоспособного	29,8	9,3	20,5	31,7	8,9	22,8	20,5	22,2
Городское население в возрасте:							100	100
моложе трудоспособного	18,0	9,2	8,8	16,1	8,2	7,9	16,9	15,3
трудоспособном	67,3	33,4	33,9	65,8	33,4	32,4	63,2	62,5
старше трудоспособного	21,0	6,4	14,6	23,4	6,5	16,9	19,8	22,2
Сельское население в возрасте:							100	100
моложе трудоспособного	8,3	4,2	4,1	7,0	3,6	3,4	21,5	18,7
трудоспособном	21,7	11,4	10,3	22,2	11,9	10,3	56,0	59,2
старше трудоспособного	8,8	2,9	5,9	8,3	2,4	5,9	22,5	22,1

4. Состояние в браке, рождаемость

Число супружеских пар составило 33 млн (в 2002 г. — 34 млн). Из общего числа супружеских пар 4,4 млн (13%) состояли в незарегистрированном браке (в 2002 г. — 3,3 млн, или 9,7%).

Брачное состояние населения в возрасте 16 лет и более, млн чел.



Кроме того, 1,8 тыс. человек в возрасте моложе 16 лет указали, что они состоят в браке, из них 1,1 тыс. человек – в незарегистрированном (в 2002 г. соответственно 3,7 тыс. и 2,2 тыс. человек).

Брачное состояние населения (на 1000 человек в возрасте 16 лет и более)

По данным переписи 2010 г. рождаемость у женщин в возрасте 15 лет и более, проживающих в частных домохозяйствах, характеризуется следующими данными:

Все женщины в возрасте 15 лет и более, ответившие на вопрос о рождаемости, из них указали число рожденных детей:	Млн человек		2010 г. в % к 2002 г.	В % к итогу	
	2002 г.	2010 г.		2002 г.	2010 г.
	62,9	62,4	99,3	100	100
1	19,2	19,4	101,4	30,5	31,2
2	21,2	21,5	101,5	33,7	34,4
3	5,6	5,5	97,5	8,9	8,7
4	1,6	1,4	87,1	2,5	2,2
5 и более	1,7	1,2	72,3	2,7	2,0
Не родили ни одного ребенка	13,6	13,4	98,4	21,7	21,5

Среднее число рожденных женщинами детей уменьшилось в расчете на 1000 женщин с 1513 в 2002 г. до 1469 в 2010 г. В городских населенных пунктах этот показатель составил 1328 детей (в 2002 г. — 1350), а в селе — 1876 (в 2002 г. — 1993).

Из общей численности женщин в возрасте 15 лет и более, родивших детей, первого ребенка родили в возрасте 15–19 лет 19% женщин, в возрасте 20–24 лет — 54%, в возрасте 25–29 лет — 19%, в возрасте 30–34 лет — 5,3%, в возрасте 35 лет и более — 1,9% женщин.

5. Число и состав домохозяйств

В 2010 г. было зафиксировано 54,6 млн частных домохозяйств, в которых проживало 141,0 млн человек, или 99% всего населения России. По размеру частные домохозяйства (далее домохозяйства) распределяются следующим образом:

Всего домохозяйств, в том числе домохозяйства, состоящие:	Число домохозяйств, млн		2010 г., в % к 2002 г.	В % к итогу	
	2002 г.	2010 г.		2002 г.	2010 г.
	52,7	54,6	103,5	100	100
из 1 человека	11,8	14,0	119,4	22,3	25,7
из 2 человек	14,5	15,6	107,1	27,6	28,5
из 3 человек	12,5	12,3	98,0	23,8	22,5
из 4 человек	9,0	7,9	88,4	17,0	14,5
из 5 человек	3,0	2,9	96,1	5,7	5,4
из 6 и более человек	1,9	1,9	97,4	3,6	3,4
Средний размер домохозяйства, чел.	2,7	2,6	×	×	×

Средний размер домохозяйства (среднее число членов домохозяйства) в России уменьшился и составил 2,6 человека (в 2002 г. — 2,7 человека). Невысокий средний размер домохозяйства в целом по России обусловлен наличием большого числа домохозяйств, состоящих из одного и двух человек, такие домохозяйства составляют более половины всех частных домохозяйств.

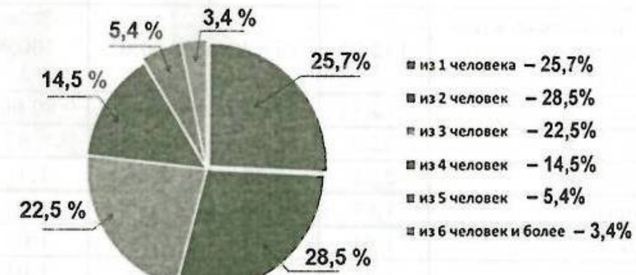
Среди домохозяйств, состоящих из двух и более человек, 17,9 млн домохозяйств (44%) имеют детей моложе 18 лет (в 2002 г. домохозяйства, имеющие детей моложе 18 лет, составляли 52%). В межпереписной период увеличилось на 15 % число домохозяйств, не имеющих детей до 18 лет.

В составе домохозяйств, как в городе, так и в селе, по-прежнему преобладают домохозяйства с однним ребенком.

В коллективных домохозяйствах (это лица, проживающие в детских домах, школах-интернатах для детей-сирот и детей, оставшихся без попечения родителей, стационарных учреждениях социального обслуживания, казармах, местах лишения свободы, монастырях и тому подобных специализированных учреждениях) учтено 1,8 млн человек, а в 2002 г. — 2,3 млн человек. При переписи 2010 г. было зафиксировано 34 тыс. домохозяйств бездомных (в 2002 г. — 68 тыс.), в которые входят почти 64 тыс. человек (в 2002 г. — 143 тыс. человек).

Число и размер домохозяйств

54,6 млн частных домохозяйств	В них проживает 141,0 млн человек, или 99% всего населения России	Средний размер домохозяйства – 2,6 человека



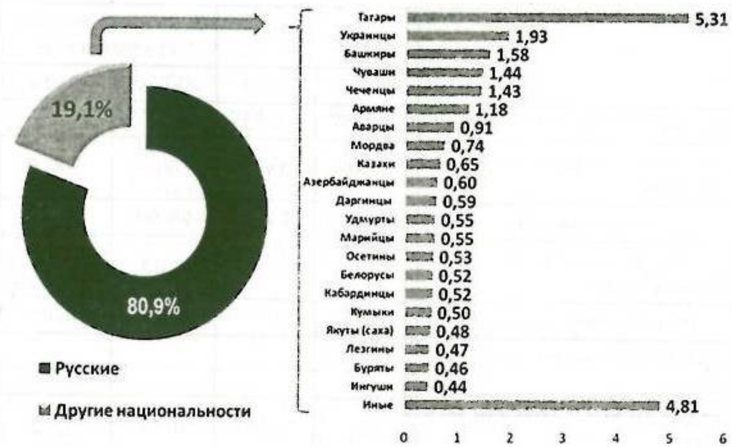
6. Национальный состав, владение языками, гражданство

В соответствии с Конституцией Российской Федерации национальная принадлежность в ходе опроса населения указывалась самими опрашиваемыми на основе самоопределения и записывалась переписными работниками строго со слов опрашиваемых. При рассмотрении национального состава населения следует иметь в виду, что на численность населения отдельных национальностей могло повлиять то, что население имело право не отвечать на вопрос о национальной принадлежности. В связи с этим в 2010 г. у 5,6 млн человек (почти 4%, в 2002 г. — 1,5 млн человек, или 1%) отсутствуют сведения о национальной принадлежности, из них о 3,6 млн человек сведения получены из административных источников, а 2 млн человек не определили свою национальную принадлежность.

Изменение численности населения наиболее многочисленных национальностей характеризуется следующими данными:

	Млн человек		В % к указавшим национальную принадлежность	
	2002 г.	2010 г.	2002 г.	2012 г.
Все население	145,17	142,86		
в том числе указавшие национальную принадлежность	143,71	137,23	100,0	100,0
русские	115,89	111,02	80,64	80,90
татары	5,55	5,31	3,87	3,87
украинцы	2,94	1,93	2,05	1,41
башкиры	1,67	1,58	1,16	1,15
чуваши	1,64	1,44	1,14	1,05
чеченцы	1,36	1,43	0,95	1,04
армяне	1,13	1,18	0,79	0,86
аварцы	0,81	0,91	0,57	0,66
мордва	0,84	0,74	0,59	0,54
казахи	0,65	0,65	0,46	0,47
азербайджанцы	0,62	0,60	0,43	0,44
даргинцы	0,51	0,59	0,35	0,43
удмурты	0,64	0,55	0,44	0,40
марийцы	0,60	0,55	0,42	0,40
осетины	0,51	0,53	0,36	0,39
белорусы	0,81	0,52	0,56	0,38
кабардинцы	0,52	0,52	0,36	0,38
кумыки	0,42	0,50	0,29	0,37
якуты (саха)	0,44	0,48	0,31	0,35
лезгины	0,41	0,47	0,29	0,35
буряты	0,45	0,46	0,31	0,34
ингуши	0,41	0,44	0,29	0,32
другие национальности	4,85	4,81	3,40	3,51
Не указавшие национальную принадлежность и лица, по которым сведения получены из административных источников	1,46	5,63		

Национальный состав населения, указавшего национальность в переписном листе, млн человек



Из общего числа частных домохозяйств, состоящих из 2 и более человек, 84% домохозяйств являются мононациональными, где все члены домохозяйства принадлежат к одной национальности.

В 2010 г. владение русским языком указало 138 млн человек (99,4% из числа ответивших на вопрос о владении русским языком), в 2002 г. — 142,6 млн человек (99,2%). Среди горожан владели русским языком 101 млн человек (99,8%), а среди сельского населения — 37 млн человек (98,7%).

Среди других языков наиболее распространенными являются английский, татарский, немецкий, чеченский, башкирский, украинский, чувашский.

Владение русским жестовым языком глухих указали 121 тыс. человек.

Численность граждан Российской Федерации составила 137,9 млн человек (99,4% лиц, указавших гражданство), 0,7 млн человек имеют гражданство других государств и 0,2 млн человек — лица без гражданства. Из общей численности граждан Российской Федерации 79 тыс. человек имеют два гражданства. У более 4,1 млн человек в переписном листе гражданство не указано.

Изменение гражданства населения России за межпереписной период видно из следующих данных:

	Тыс. человек		В % к указавшим гражданство	
	2002 г.	2010 г.	2002 г.	2010 г.
Все население, в том числе:	145167	142857		
указавшие гражданство, из них	143898	138722	100,0	100,0
граждане России	142443	137857	98,99	99,38
из них имеющие два гражданства	44	79	0,03	0,06
иностранные граждане	1025	687	0,71	0,49
из них имеющие гражданство:				
государств – участников СНГ	853	579	0,59	0,42
в том числе:				
Азербайджана	155	68	0,10	0,05
Армении	137	59	0,10	0,04
Беларуси	40	28	0,03	0,02
Казахстана	69	28	0,05	0,02
Киргизии	29	45	0,02	0,03
Молдавии	51	34	0,04	0,02
Таджикистана	64	87	0,04	0,07
Туркмении	6	6	0,00	0,00
Узбекистана	71	131	0,05	0,10
Украины	231	93	0,16	0,07
Других государств	172	108	0,12	0,07
Без гражданства	430	1789	0,30	0,13
Не указавшие гражданство и лица, по которым сведения получены из административных источников	1269	4135		

7. Уровень образования населения

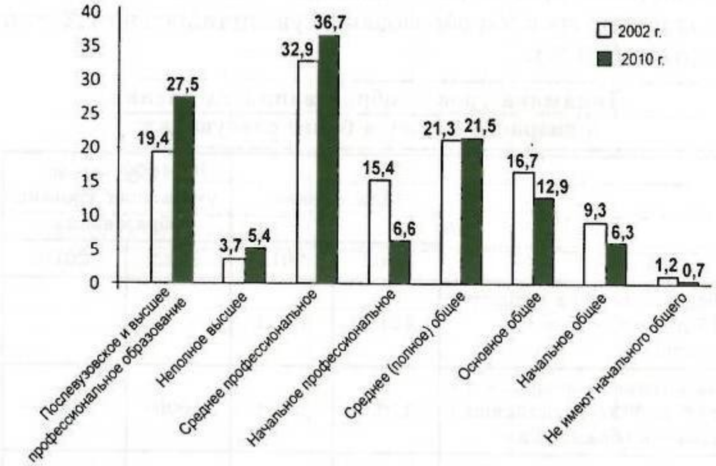
При переписи населения 2010 г. учтено 110,6 млн человек в возрасте 15 лет и более, имеющих образование основное общее и выше, что составляет 91% этой возрастной группы. По сравнению с 2002 г. число лиц с указанным уровнем образования увеличилось на 1,2 млн человек (1,1%).

Динамика уровня образования населения в возрасте 15 лет и более следующая:

	Млн человек		На 1000 человек, указавших уровень образования	
	2002	2010	2002	2010
Все население в возрасте 15 лет и более, в том числе:	121,3	121,1		
население в возрасте 15 лет и более, указавшее уровень образования:	119,9	117,6	1000	1000
профессиональное образование				
высшее	19,4	27,5	162	234
из него послевузовское	0,4	0,7	3	6
неполное высшее	3,7	5,4	31	46
среднее	32,9	36,7	275	312
начальное	15,4	6,6	128	56
общее образование				
среднее (полное)	21,3	21,5	177	182
основное	16,7	12,9	139	110
начальное	9,3	6,3	789	54
не имеют начального общего образования	1,2	0,7	10	6
Не указавшие уровень образования и лица, по которым сведения получены из административных источников	1,4	3,5		

Из общей численности лиц с высшим профессиональным образованием степень бакалавра имеют 1,1 млн человек (4,3%), специалиста — 25,1 млн человек (93%) и магистра 0,6 млн человек (2,3%).

Уровень образования населения в возрасте 15 лет и более, млн человек



Среди специалистов с высшим профессиональным образованием 707 тыс. человек имеют послевузовское образование (в 2002 г. — 369 тыс. человек).

В России насчитывается 596 тыс. кандидатов наук и 124 тыс. докторов наук. Среди кандидатов наук женщины составляют 265 тыс. человек (44%), среди докторов наук — 41 тыс. человек (33%). По возрасту среди кандидатов наук преобладают лица в трудоспособном возрасте (65%), среди докторов наук — лица старше трудоспособного возраста (51%).

Увеличилась численность лиц с неполным высшим образованием (на 44%), при этом 68% из них продолжают обучение.

Незначительно выросла численность лиц, имеющих среднее (полное) общее образование (на 189 тыс. человек, или на 0,9%). В то же время уменьшилась численность лиц в возрасте 15 лет и более с основным общим и начальным образованием.

Следует отметить уменьшение доли неграмотного населения в возрасте 10 лет и более. Если в 2002 г. доля неграмотных в этой возрастной группе составляла 0,5%, то в 2010 г. — 0,3%. Среди неграмотного населения 42% — это лица в возрасте 60 лет и более (в 2002 г. — 67%).

8. Источники средств к существованию

В 2010 г. 103,6 млн человек имели один источник средств к существованию, два источника имели 33,0 млн человек, три источника и более было у 2,2 млн человек (см. табл. на стр. 386).

9. Экономическая активность населения

Изменение экономической активности населения в возрасте 15–64 лет, проживающего в частных домохозяйствах, в межпереписной период характеризуется следующими данными:

	Млн человек		2010 г. в % к 2002 г.	В % к итогу	
	2002 г.	2010 г.		2002 г.	2010 г.
Население частных домохозяйств в возрасте 15–64 лет, в том числе:	99,8	101,2	101,5	100	100
экономически активное население, в том числе:	67,1	71,2	106,1	67,2	70,3
занятые в экономике	59,7	64,9	108,8	59,8	64,1
из них пенсионеры	3,7	6,4	174,6	3,7	6,3
безработные	7,4	6,3	84,5	7,4	6,2
из них пенсионеры	0,7	0,6	84,4	0,7	0,6
экономически неактивное население, из них:	30,9	25,4	82,2	31,0	25,1
стипендиаты	2,8	2,1	74,3	2,8	2,0
пенсионеры	12,1	11,6	96,1	12,1	11,5
Не указавшие экономическую активность и лица, по которым сведения получены из административных источников	1,8	4,6	260,0	1,8	4,6

Виды источников средств к существованию и численность населения

Виды источников средств к существованию	Население по всем указанным источникам, тыс. человек		2010 г. в % к 2002 г. по всем источникам	Население по основному источнику в 2010 г., тыс. человек	В % ко всему населению, указавшему источники средств к существованию		
	2002 г.	2010 г.			По всем источникам		По основному источнику в 2010 г.
					2002 г.	2010 г.	
Трудовая деятельность (включая работу по совместительству)	62165	66621	107,2	62850	43,3	48,0	45,2
Личное подсобное хозяйство	18204	14979	82,3	2099	12,7	10,8	1,5
Стипендия	3330	2768	83,1	583	2,3	2,0	0,4
Пенсия (кроме пенсии по инвалидности)	31920	33475	104,9	27382	22,2	24,1	19,7
Пенсия по инвалидности	4711	5170	109,8	3478	3,3	3,7	2,5
Пособие (кроме пособия по безработице)	16634	10771	64,8	1677	11,6	7,8	1,2
Пособие по безработице	1171	1416	120,9	929	0,8	1,0	0,7
Другой вид государственного обеспечения	1976	1717	86,9	1193	1,4	1,2	0,9
Сбережения, дивиденды, проценты	350	641	183,3	287	0,2	0,5	0,2
Сдача внаем или в аренду имущества; доход от патентов, авторских прав	225	369	164,1	63	0,2	0,3	0,0
Иждивение; помощь других лиц; алименты	43460	38423	88,4	35955	30,3	27,7	25,9
Иной источник	2197	117	5,3	90	1,5	0,1	0,1
Не указавшие источник средств к существованию и лица, по которым сведения получены из административных источников	1504	3971	264,1	6271	1,0	2,9	1,7

Экономическая активность населения выросла на 6,1%, при этом рост происходил за счет увеличения занятого населения (на 8,8%) при одновременном сокращении численности безработных (на 16%).

Численность экономически неактивного населения (например, неработающих пенсионеров, учащихся, домохозяек, лиц, не имеющих и не ищущих работу) сократилась на 18%, а их доля среди населения частных домохозяйств в возрасте 15–64 лет составила 25% против 31% в 2002 г.

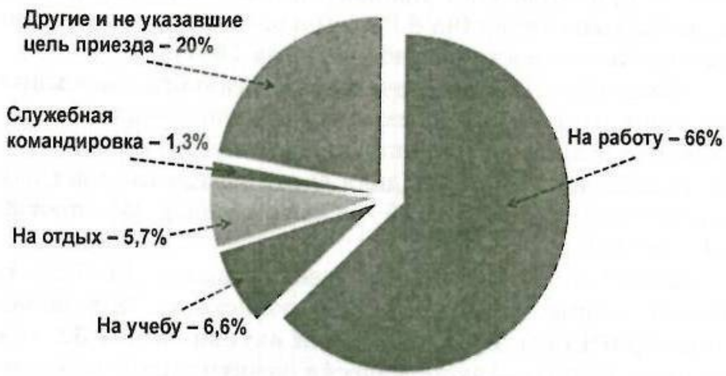
В 2010 г. из 109 млн человек в возрасте 15–72 лет, проживающих в частных домохозяйствах, 72 млн человек (66%) были экономически активными, а 32 млн человек (29%) — экономически неактивными и 5 млн человек (5%) не указали экономическую активность.

Почти 66 млн человек (или 91%) экономически активного населения в возрасте 15–72 лет составляют занятые в экономике, а 6,3 млн (или 9 %) приходится на безработных. Среди безработных 2,8 млн человек, или 44%, — это молодежь в возрасте 15–29 лет.

В 2010 г. 1,7 млн занятых (2,5%) указали, что имеют не одну работу.

Из общего числа занятых в экономике в возрасте 15–72 лет абсолютное большинство — 61,6 млн человек (94%) являются работающими по найму. По сравнению с 2002 г. численность наемных работников увеличилась на 5,8%. Численность работодателей, привлекающих для осуществления своей деятельности наемных работников, составила 1,4 млн человек (в 2002 г. — 923 тыс. человек). В ходе переписи населения было учтено 489 тыс. человек, временно находившихся на территории Российской Федерации и постоянно проживающих за рубежом.

Цели приезда в Российскую Федерацию



Национальный проект «Здоровье»

В России впервые за последние 15 лет зафиксирован естественный прирост населения, который в августе 2009 г. составил 1 тыс. человек. По данным Министерства здравоохранения и социального развития, за август 2009 г. в России родилось 151,7 тыс. детей, умерло 150,7 тыс. человек. Количество родившихся за январь — август составило 1,164 млн человек, что больше на 41 тыс. по сравнению с аналогичным периодом 2008 г. Количество умерших составило 1,347 млн, что на 57 тыс. человек меньше показателя 2008 г.

С 1 января 2006 г. стартовал проект «Здоровье». Проект уже получил название «национального приоритетного проекта» и был разработан для реализации предложений В.В. Путина по совершенствованию медицинской помощи в Российской Федерации. Основная задача проекта — улучшение ситуации в здравоохранении и создание условий для его последующей модернизации.

В рамках реализации национального проекта «Здоровье» можно выделить три основных направления: повышение приоритетности первичной медико-санитарной помощи, усиление профилактической направленности здравоохранения, расширение доступности высокотехнологичной медицинской помощи.

Основные направления национального проекта «Здоровье» и дополнительные мероприятия в области демографии:

1. Развитие первичной медицинской помощи.
2. Развитие профилактического направления медицинской помощи, пропаганда здорового образа жизни.
3. Повышение доступности высокотехнологичной (дорогостоящей) медицинской помощи.
4. Оказание медицинской помощи женщинам в период беременности и родов через систему родовых сертификатов.
5. Увеличение пособий по материнству и детству: по беременности и родам, при рождении ребенка, по уходу за ребенком до достижения им возраста полутора лет и пособий женщинам при постановке на учет в ранние сроки беременности.

Основное внимание планируется уделить укреплению первичного медицинского звена (муниципальные поликлиники, участковые больницы) — увеличению зарплаты участковым врачам и медсестрам, оснащению этих медучреждений необходимым оборудованием, переобучению врачей общей практики, введению родовых сертификатов.

Введение родовых сертификатов предполагает стимулирование работы женских консультаций и родильных домов на территории России, которое должно привести к улучшению ситуации в родовспоможении, снижению материнской и младенческой смертности, повышению уровня сопровождения беременности и обслуживания. За каждым сертификатом стоит конкретная сумма, которая будет выплачиваться из Фонда социального страхования РФ, а следовательно, учреждения будут заинтересованы в каждой конкретной беременной.

Национальный проект «Здоровье» предусматривает усиление профилактической направленности здравоохранения, которое реализуется через:

- формирование у населения культуры здоровья;
- повышение мотивации к сохранению своего здоровья;
- проведение дополнительной диспансеризации работающего населения;

- формирование паспорта здоровья работающего населения.

Особое внимание уделяется повышению доступности высокотехнологичных видов медицинской помощи, удовлетворению потребности населения в дорогостоящих видах медицинской помощи, переводу федеральных специализированных медицинских учреждений на работу в условиях государственного задания.

Планируется создание новых медицинских центров высоких технологий, способных с учетом достижений медицинской науки совершить прорыв отечественного здравоохранения в области высоких технологий и обеспечения доступности высокотехнологичной медицинской помощи.

Задания для самостоятельной работы

№ 164.

Используйте исходную таблицу: «Демография в Российской Федерации»:

Год	Численность населения, млн	Число родившихся, тыс. человек	Число умерших, тыс. человек
1990	148,0	1988,9	1656,0
1991	148,5	1794,6	1690,7
1992	148,3	1587,6	1807,4
1993	148,3	1379,0	2129,3
1994	148,0	1408,2	2301,3
1995	147,9	1363,8	2203,8
1996	147,6	1304,6	2082,2
1997	147,1	1259,9	2015,8
1998	146,7	1283,3	1988,7
1999	146,3	1214,6	2140,3
2000	146,1	1266,8	2217,1
2001	145,7	1301,6	2254,8
2002	145,2	1306,9	2242,2
2003	144,1	1353,8	2261,9
2004	143,4	1391,2	2235,6
2005	143,0	1457,4	2304,1
2006	142,6	1479,6	2167,3
2007	142,3	1610,1	2080,5
2008	142,1	1717,5	2076,6
2009	142,0	1724,1	2078,2
2010	142,2	1735,8	2077,3

Вычислите следующие медико-демографические показатели: показатель рождаемости, показатель смертности, показатель естественного прироста населения. Данные поместите также в таблицу:

Год	Показатель рождаемости (‰)	Показатель смертности (‰)	Естественный прирост (‰)
1990			
...	...	...	...
2010			

Вычисления проводите по формулам:

$$1)\ \text{Показатель рождаемости (‰)} = \frac{\text{Число родившихся живыми за год} \cdot 1000}{\text{Среднегодовая численность населения}}.$$

$$2)\ \text{Показатель общей смертности (‰)} = \frac{\text{Число умерших за год} \cdot 1000}{\text{Среднегодовая численность населения}}.$$

$$3)\ \text{Показатель естественного прироста населения (‰)} = \text{Показатель рождаемости} - \text{Показатель смертности}.$$

Для анализа и сравнения постройте графические зависимости всех трех показателей в одной системе координат: на горизонтальной оси отложите года с одинаковым интервалом (1 см), на вертикальной оси ведется отсчет показателей в масштабе 1 клетка — 1 ‰. Графики выделите различными цветами, например, показатель рождаемости — красный цвет, показатель смертности — черный цвет, естественный прирост — зеленый цвет.

Вопросы по теме

1. *Перечислите основные медико-демографические показатели. По каким формулам они вычисляются?*
2. *Какова динамика изменения рождаемости в рассматриваемом периоде?*
3. *Как менялась смертность по годам?*
4. *Что можно сказать о естественном приросте населения в России в последние годы?*
5. *Что вам известно о национальном проекте «Здоровье»?*

Исторические сведения к разделу 4

Теория вероятностей

Теория вероятностей возникла в середине XVII в. Первые работы по теории вероятностей, принадлежавшие французским ученым Б. Паскалю и П. Ферма и голландскому ученому Х. Гюйгенсу, появились в связи с подсчетом различных вероятностей в азартных играх. Крупный успех теории вероятностей связан с именем швейцарского математика Я. Бернулли, установившего закон больших чисел для схемы независимых испытаний с двумя исходами (опубликовано в 1713 г.): при неограниченном количестве числа испытаний частота появления события равна его вероятности.

Следующий (второй) период истории теории вероятностей (XVIII — начало XIX в.) связан с именами А. Муавра (Англия), П. Лапласа (Франция), К. Гаусса (Германия) и С. Пуассона (Франция). Это период, когда

теория вероятностей уже находит ряд весьма актуальных применений в естествознании и технике (главным образом в теории ошибок наблюдений, развившейся в связи с потребностями геодезии и астрономии, и в теории стрельбы). К этому периоду относится доказательство первых предельных теорем, носящих теперь названия теорем Лапласа (1812) и Пуассона (1837); А. Лежандром (Франция, 1806) и Гауссом (1808) в это же время был разработан способ наименьших квадратов.

Третий период истории теории вероятностей (вторая половина XIX в.) связан в основном с именами русских математиков Пафнутия Львовича Чебышева (1821–1894), Александра Михайловича Ляпунова (1857–1918) и Андрея Андреевича Маркова (старшего, 1856–1922). Теория вероятности развивалась в России и раньше (в XVIII в. ряд трудов по теории вероятности был написан работавшими в России Л. Эйлером, Н. Бернулли и Д. Бернулли; во второй период развития теории вероятностей следует отметить работы М.В. Остроградского (1801–1861) по вопросам теории вероятностей, связанным с математической статистикой, и В.Я. Буняковского (1804–1889) по применению теории вероятностей к страховому делу, статистике и демографии). Со второй половины XIX в. исследования по теории вероятностей в России занимают ведущее место в мире. П.Л. Чебышев и его ученики А.М. Ляпунов и А.А. Марков поставили и решили ряд общих задач в теории вероятностей, обобщающих теоремы Бернулли и Лапласа. П.Л. Чебышев чрезвычайно просто доказал (1867) закон больших чисел при весьма общих предположениях. Он же впервые сформулировал (1887) центральную предельную теорему для сумм независимых случайных величин и указал один из методов ее доказательства. Другим методом А.М. Ляпунов получил (1901) близкое к окончательному решение этого вопроса. А.А. Марков впервые рассмотрел (1907) один случай зависимых испытаний, который впоследствии получил название цепей А.А. Маркова.

В Западной Европе во второй половине XIX в. получили большое развитие работы по математической статистике (в Бельгии — А. Кетле, в Англии — Ф. Гальтон) и статистической физике (в Австрии — Л. Больцман), которые наряду с основными теоретическими работами П.Л. Чебышева, А.М. Ляпунова и А.А. Маркова создали основу для существенного расширения проблематики теории вероятностей в четвертом (современном) периоде ее развития. Этот период истории теории вероятностей характеризуется чрезвычайным расширением круга ее применений, созданием нескольких систем безукоризненно строгого математического обоснования теории вероятности, новых мощных методов, требующих иногда применения (помимо классического анализа) средств теории множеств, теории функций действительного переменного и функционального анализа. В этот период при очень большом усилении работы по теории вероятностей за рубежом (во Франции — Э. Борель, П. Леви, М. Фреше, в Германии — Р. Мизес, в США — Н. Винер, В. Феллер, Дж. Дуб, в Швеции — Г. Крамер) советская наука продолжает занимать значительное, а в ряде направлений и ведущее положение. В нашей стране новый период развития теории вероятностей открывается деятельностью С.Н. Бернштейна, значительно обобщившего классические предельные теоремы П.Л. Чебышева, А.М. Ляпунова и А.А. Маркова и впервые в России широко поставившего работу по применению теории вероятностей к естествознанию. В Москве А.Я. Хинчин и А.Н. Колмогоров начали с применения к вопросам теории вероятностей методов теории функций действительного переменного. Позднее (в 30-х гг.) они (и Е.Е. Слуцкий) заложили основы теории случайных процессов. В.И. Романовский (Ташкент) и Н.В. Смирнов (Москва) поставили на большую высоту работу по применениям теории вероятностей к математической статистике. Кроме обширной московской группы специалистов по теории вероятностей, разработкой проблем теории вероятностей занимаются в Санкт-Петербурге (кафедра Ю.В. Линника) и в Киеве.

Первой публикацией по теории вероятностей в России была, как известно, работа Даниила Бернулли «Опыт новой теории о мере жребия», опубликованная в 1738 г. в пятом томе «Записок Императорской Академии наук».

Первой российской диссертацией по теории вероятностей была магистерская диссертация П.Л. Чебышева «Опыт элементарного анализа теории вероятностей», выполненная по предложению профессора Н.Д. Брашмана на физико-математическом факультете Московского университета в 1845 г. и защищенная в 1846 г.

А первый курс лекций по теории вероятностей в Московском университете был прочитан в 1850 г. профессором А. Ю. Давидовым (1823–1886).

В это же время в Санкт-Петербурге теорией вероятностей и математической статистикой занимаются академик М.В. Остроградский и академик В.Я. Буняковский, который издает (1846 г.) первый русский учебник «Основания математической теории вероятностей».

С 1847 г. П.Л. Чебышев начинает преподавать в Санкт-Петербургском университете. С 1860 г. к нему переходит от В. Я. Буняковского курс теории вероятностей, что стало дополнительным стимулом для его размышлений в этой области. Собственно, с этого времени и происходит зарождение «петербургской школы» теории вероятностей, прославленной выдающимися работами академиков П.Л. Чебышева, А.А. Маркова, А.М. Ляпунова. Избранные труды этих ученых вышли в свет в серии «Классики науки и техники» Издательства АН СССР.

С 1907 по 1933 г. в Харькове работал академик С.Н. Бернштейн (1880–1968), который не только значительно продвинул исследования петербургской школы по предельным теоремам теории вероятностей, но и занялся вопросами логического обоснования самой теории («Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей»).

Начало современного периода в развитии теории вероятностей в Московском университете было положено работами А.Я. Хинчина по закону повторного логарифма (1923, 1924), Е.Е. Слуцкого по теории случайных функций (1925) и работой А.Я. Хинчина и А.Н. Колмогорова «О сходимости рядов, члены которых определяются случаем», опубликованной в 1925 г. (на немецком языке). В 1926 г. А.Я. Хинчин прочитал первый в истории Московского университета специальный курс по теории вероятностей, слушателями которого были А.Н. Колмогоров, Н.В. Смирнов, В.И. Гливенко.

Теоретико-множественный подход к проблемам теории вероятностей, зародившийся в недрах лузинской математической школы и с успехом примененный А.Я. Хинчиным и А.Н. Колмогоровым, оказался столь плодотворным, что, по существу, именно на нем и основана вся современная теория вероятностей.

В 1933 г. в Московском университете организуется механико-математический факультет, в составе которого в 1935 г. была образована кафедра теории вероятностей, ставшая одним из основных центров по подготовке специалистов и научным исследованиям в области теории вероятностей и математической статистики в нашей стране. Многие поколения советских и российских ученых в этой области науки считают себя непосредственными питомцами этой кафедры. Первый заведующий кафедрой А.Н. Колмогоров руководил кафедрой с 1935 по 1966 г., с 1966 по 1995 г. ею заведовал Б.В. Гнеденко. В сентябре 1996 г. заведующим кафедрой теории вероятностей избран А.Н. Ширяев.

Об основных научных достижениях московской школы теории вероятностей и кафедры теории вероятностей Московского университета имеется достаточное число публикаций обзорного характера, в которых можно найти детальное изложение многих научных результатов.

Математическая статистика

Слово «статистика» имеет латинское происхождение (от *status* — состояние). В средние века оно означало политическое состояние государства. В науку этот термин введен в XVIII в. немецким ученым Готфридом Ахенвалем. Собственно как наука статистика возникла только в XVII в., однако статистический учет существовал уже в глубокой древности. Так, известно, что еще за 5 тыс. лет до н.э. проводились переписи населения в Китае, осуществлялось сравнение военного потенциала разных стран, велся учет имущества граждан в Древнем Риме, затем — населения, домашнего имущества, земель в Средние века.

Математическая статистика как наука начинается с работ знаменитого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777–1855), который на основе теории вероятностей исследовал и обосновал метод наименьших квадратов, созданный им в 1795 г. и примененный для обработки астрономических данных (с целью уточнения орбиты малой планеты Церера). Его именем часто называют одно из наиболее популярных распределений вероятностей — нормальное, а в теории случайных процессов основной объект изучения — гауссовские процессы.

В конце XIX – начале XX вв. крупный вклад в математическую статистику внесли английские исследователи, прежде всего К. Пирсон (1857–1936) и Р.А. Фишер (1890–1962). В частности, Пирсон разработал критерий «хи-квадрат» проверки статистических гипотез, а Фишер — дисперсионный анализ, теорию планирования эксперимента, метод максимального правдоподобия оценки параметров.

В 30-е годы XX в. поляк Ежи Нейман (1894–1977) и англичанин Э. Пирсон развили общую теорию проверки статистических гипотез, а советские математики академик А.Н. Колмогоров (1903–1987) и член-корреспондент АН СССР Н.В. Смирнов (1900–1966) заложили основы непараметрической статистики. В 40-е годы XX в. румын А. Вальд (1902–1950) построил теорию последовательного статистического анализа.

Математическая статистика бурно развивается и в настоящее время. Так, за последние 40 лет можно выделить четыре принципиально новых направления исследований:

1) разработка и внедрение математических методов планирования экспериментов;
2) развитие статистики объектов нечисловой природы как самостоятельного направления в прикладной математической статистике;
3) развитие статистических методов, устойчивых по отношению к малым отклонениям от используемой вероятностной модели;
4) широкое развертывание работ по созданию компьютерных пакетов программ, предназначенных для проведения статистического анализа данных.

Санитарная статистика начала формироваться в России в последней четверти XIX в. прежде всего в трудах П. И. Куркина (1858–1939), В. Г. Михайловского (1871–1926), Ф.Д. Маркузона (1884–1967) и др.

Практические работы

1. Построение графика функции.

Используя программу *Microsoft Excel*, постройте график функции и запишите основные свойства.

№ варианта	Задания	
1	а) $y = 4x^3 - 3x^4 + 5$	б) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$
2	а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2$	б) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$
3	а) $y = 12x - x^3$	б) $y = x\sqrt{1 - x}$
4	а) $y = x^3 - 6x^2 + x$	б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$
5	а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$	б) $y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$
6	а) $y = 2x^4 - 4x^2 + 8$	б) $y = \dfrac{2x - 1}{(x - 1)^2}$
7	а) $y = 3x^4 - 6x^2 - 1$	б) $y = \dfrac{3 - 2x}{(x - 2)^2}$
8	а) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7$	б) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$
9	а) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$	б) $y = \dfrac{x}{x + 1}$
10	а) $y = 3x^4 - 8x^3 + 1$	б) $y = \dfrac{8}{4 - x^2}$

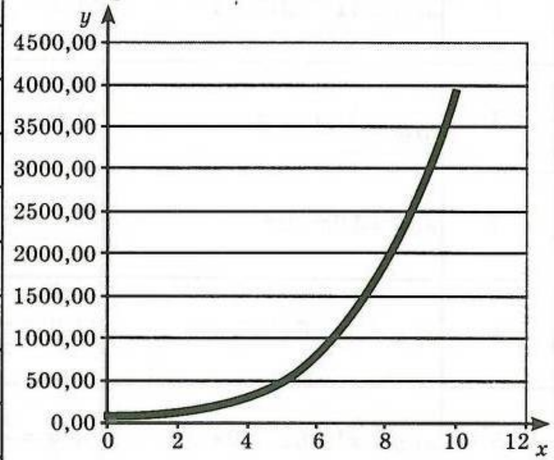
Таблицу значений x и y можно заполнять и вертикально, и горизонтально.

Пример 1.

x	y
0	76,00
0,5	88,38
1	97,00
1,5	105,63
2	118,00
2,5	137,88
3	169,00
3,5	215,13
4	280,00
4,5	367,38
5	481,00
5,5	624,63
6	802,00
6,5	1016,88
7	1273,00
7,5	1574,13
8	1924,00
8,5	2326,38
9	2785,00
9,5	3303,63
10	3886,00

График функции

$$y = 5x^3 - 15x^2 + 31x + 76$$



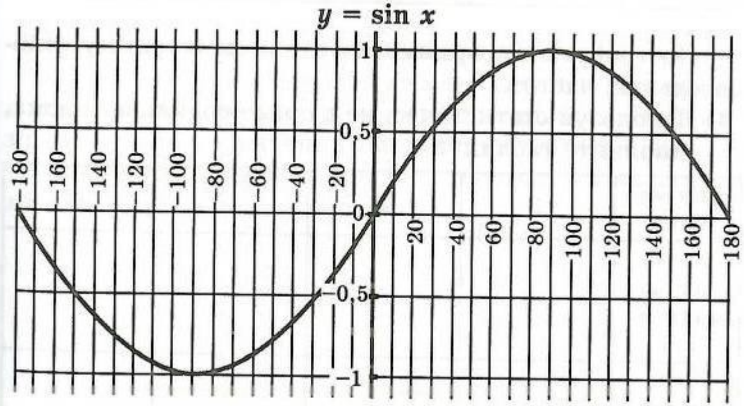
Пример 2.

Для расчета $y = \sin x$ введите формулу в ячейки таблицы = SIN (РАДИАНЫ (Адрес ячейки))

x	y	x	y
−180	−1,22515*E* −16	0	0
−170	−0,173648178	10	0,173648178
−160	−0,342020143	20	0,342020143
−150	−0,5	30	0,5
−140	−0,64278761	40	0,64278761
−130	−0,766044443	50	0,766044443
−120	−0,866025404	60	0,866025404
−110	−0,939692621	70	0,939692621
−100	−0,984807753	80	0,984807753
−90	−1	90	1
−80	−0,984807753	100	0,984807753
−70	−0,939692621	110	0,939692621
−60	−0,866025404	120	0,866025404
−50	−0,766044443	130	0,766044443
−40	−0,64278761	140	0,64278761
−30	−0,5	150	0,5
−20	−0,342020143	160	0,342020143
−10	−0,173648178	170	0,173648178
0	0	180	1,22515*E*-16

График функции

$$y = \sin x$$



2. Построение диаграмм.

Используя программу *Microsoft Excel*, выполните задания:

1) Врачи рекомендуют дневную норму пищи распределять на четыре приема: утренний завтрак — 25%, второй завтрак — 15, обед — 45, ужин — 15%. Постройте круговую диаграмму распределения дневной нормы пищи.

2) По возрастному составу жители Санкт-Петербурга распределились следующим образом: до 16 лет — 12,2%, от 16 до 25 — 25,7, от 25 до 60 лет — 50,4, старше 60 лет — 11,7%. Постройте по этим данным круговую диаграмму.

3) В таблице показано распределение призывников по росту:

Рост, см	Частота
155–160	7
160–165	10
165–170	28
170–175	36
175–180	49
180–185	26
185–190	15
190–195	9

Постройте гистограмму частот и гистограмму относительных частот.

4) Используя статистические данные родильного дома, заполните таблицу:

Дни месяца	1	2	...	30
Количество мальчиков				
Количество девочек				

Постройте графики, показывающие рождение мальчиков и девочек.

5) В таблице указан расход материалов ЛПУ по кварталам.

№	Материалы	1-й квартал	2-й квартал	3-й квартал	4-й квартал
1	Шприцы	634	615	629	625
2	Бинты	156	165	178	149
3	Маски	80	67	75	50
4	Бахилы	743	781	698	752
5	Халаты	81	88	77	65

Постройте объемную гистограмму по образцу:

Использование материалов в ЛПУ

3. Приближенное вычисление интеграла.

Постройте на клетчатой бумаге систему координат с масштабом «две клетки — единица длины». Найдите приближенные значения следующих интегралов, построив графики подынтегральных функций и вычисляя площади графиков по «клеткам».

1) $\int\limits_0^{10} 0{,}1x^2dx$; 2) $\int\limits_0^{10} \frac{10}{x}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{10} 5\sin\frac{\pi x}{10}\,dx$;

4) $\int\limits_0^{8} 0{,}2x^2dx$; 5) $\int\limits_{-5}^{5} 5\cos\frac{\pi x}{10}\,dx$.

4. Приближенное вычисление интеграла с помощью интегральных сумм.

Ход работы:

— Выберите одну из функций, указанных в предыдущей работе.

— Составьте таблицу значений функции, разбив область определения на равные части длиной $\Delta x = 1$.

— Вычислите две интегральные суммы, выбирая значения функции для первой суммы на левых концах промежутков $[x_i;\ x_i + \Delta x]$, а для второй суммы на правых.

— Приведите геометрическую иллюстрацию вычисляемой площади интегральных сумм.

— Сопоставьте ответ с полученным в предыдущем задании результатом и со следующими значениями площадей с точностью до 0,01:

1) $\int\limits_0^{10} 0{,}1x^2dx \approx 33{,}33$; 2) $\int\limits_0^{10} \frac{10}{x}dx \approx 23{,}02$;

3) $\int\limits_0^{10} 5\sin\frac{\pi x}{10}dx \approx 31{,}83$; 4) $\int\limits_0^{8} 0{,}2x^2dx \approx 34{,}13$;

5) $\int\limits_{-5}^{5} 5\cos\frac{\pi x}{10}dx \approx 31{,}85$.

5. Приближенное решение дифференциального уравнения методом Эйлера.

При выполнении практической работы необходимо решить задачу: найти решение дифференциального уравнения $y' = y - x^2$, удовлетворяющее начальному условию $y_0 = 2$ при $x_0 = 0$.

1) Проверьте, что функция $y = x^2 + 2x + 2$ является точным решением поставленной задачи.

2) Будем строить график приближенного решения в виде ломаной линии. Ломаная строится, начиная с точки P_0 (0; 2). Значения $x = x_k$ берутся на отрезке [0; 1], начиная с $x_0 = 0$, с шагом h так: $x_{n+1} = x_n + h$. Значение $y = y_n$ вычисляется по формуле уравнения прямой $y_{n+1} = y_n + y_0' \cdot h$, начиная с $y_0 = 2$. Угловой коэффициент y_n' находится из дифференциального

уравнения $y_n' = y_n - x_n^2$. Составьте таблицу значений x_n, y_n, y_n' для отрезка [0; 1] при шаге $h = 0{,}2$.

3) Постройте ломаную $P_0\ P_1\ \dots\ P_5$ из найденных точек $P_k\ (x_k;\ y_k)$. Постройте график точного решения на отрезке [0; 1]. Найдите наибольшее отклонение точного решения Δ_1 от приближенного.

4) Повторите вычисления п. 2 с шагом $h = 0{,}1$. Постройте новую ломаную линию. Вычислите новое отклонение Δ_2. Во сколько раз точнее получилось приближение (т. е. каково отношение $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$) при уменьшении шага вдвое?

6. Построение графов.

Выполните задания для самостоятельной работы № 97–101 темы 3.2. «Основные понятия теории графов» на компьютере. Для реализации используйте графический редактор (любой, можно *Paint*) либо графические возможности *Microsoft Word* — наглядно представьте графы в виде рисунка графического редактора или схемы текстового процессора.

7. Анализ демографической ситуации в России.

1) По исходным данным вычислите показатель рождаемости, показатель смертности и естественный прирост с использованием офисной программы *Microsoft Excel*.

Демография Российской Федерации

№ п/п	Год	Численность населения (млн чел.)	Число родившихся, (тыс. чел.)	Число умерших (тыс. чел.)	Показатель рождаемости (‰)	Показатель смертности (‰)	Естественный прирост (‰)
1	1990	148,0	1988,9	1656,0	13,44	11,19	2,25
...							
19	2008						

Заполните таблицу, используя данные на с. 390–391.

2) В этой же программе постройте графики рассматриваемых показателей.

3) Ответьте на вопросы:

— Как изменялась рождаемость в рассматриваемом периоде?

— Что можно сказать о показателе смертности за последние 20 лет?

— Что происходит в России с естественным приростом?

— Выполнение какого правительственного документа должно нормализовать демографическую ситуацию РФ?

8. Составление и заполнение таблиц.

Составьте таблицу, используя программу *Microsoft Excel*, для расчета стоимости аптечки первой медицинской помощи:

№ п/п	Наименование лек. средства	Количество	Стоимость
Итого:			

9. Моделирование биологических процессов.

Существует гипотеза, что жизнь человека подчиняется трем циклическим процессам, называемым биоритмами. Эти циклы описывают три стороны самочувствия человека: физическую, эмоциональную и интеллектуальную. Биоритмы характеризуют подъемы и спады нашего состояния. Считается, что «взлетам» графика, представляющего собой синусоидальную зависимость, соответствуют более благоприятные дни. Дни, в которые график переходит через ось абсцисс, считаются неблагоприятными. Не все считают эту теорию строго научной, но многие верят в нее. Более того, в некоторых странах мира в критические дни, когда ось абсцисс пересекают одновременно две или три кривые, людям профессий с повышенным уровнем риска (летчикам, каскадерам и т. п.) предоставляются выходные дни.

За точку отсчета всех трех биоритмов берется день рождения человека. Момент рождения для человека очень труден, ведь все три биоритма в этот день пересекают ось абсцисс. С точки зрения биологии это достаточно правдоподобно, ведь ребенок, появляясь на свет, меняет водную среду обитания на воздушную. Происходит глобальная перестройка всего организма.

Физический биоритм характеризует жизненные силы человека, т.е. его физическое самочувствие. Периодичность его составляет 23 дня.

Эмоциональный биоритм характеризует внутренний настрой человека, его способность эмоционального восприятия окружающего. Продолжительность периода эмоционального цикла равна 28 дням.

Третий биоритм характеризует мыслительные способности, интеллектуальное состояние человека. Цикличность его — 33 дня.

Предлагается осуществить моделирование биоритмов для конкретного человека от указанной текущей даты (дня отсчета) на месяц вперед с целью дальнейшего анализа модели.

Цель моделирования — на основе анализа индивидуальных биоритмов прогнозировать неблагоприятные дни, выбирать благоприятные дни для разного рода деятельности.

Указанные циклы можно описать приведенными ниже выражениями, в которых переменная x — количество прожитых человеком дней:

физический цикл ФИЗ $(x) = \sin(2\pi x/23)$;

эмоциональный цикл ЭМО $(x) = \sin(2\pi x/28)$;

интеллектуальный цикл ИНТ $(x) = \sin(2\pi x/33)$.

Примечание.

Обратите внимание! В каждую формулу входит выражение (A9 — B4), которое вычисляет количество дней, прожитых человеком. И хотя это выражение содержит ссылки на ячейки, в которых записаны даты, среда электронных таблиц автоматически вычисляет каждую дату как количество дней, прошедших с 1 января 1900 г., а затем определяет разность между ними. При записи формул следует использовать вставку стандартных функций СИН (...) и ПИ.

Дата заполняется по формату 00.00.0000. Если дата набрана правильно, то ячейке автоматически будет присвоен формат Дата. Признаком правильного набора даты является выравнивание значения вправо.

Запишем расчетные формулы:

Ячейка	Формула	
A9	= B5	(1)
A10	= A9 + 1	(2)
B9	= СИН(2*ПИ()*(A9-B4)/23)	(3)
C9	= СИН(2*ПИ()*(A9-B4)/28)	(4)
D9	= СИН(2*ПИ()*(A9-B4)/33)	(5)

В программе *Microsoft Excel* таблица заполняется следующим образом.

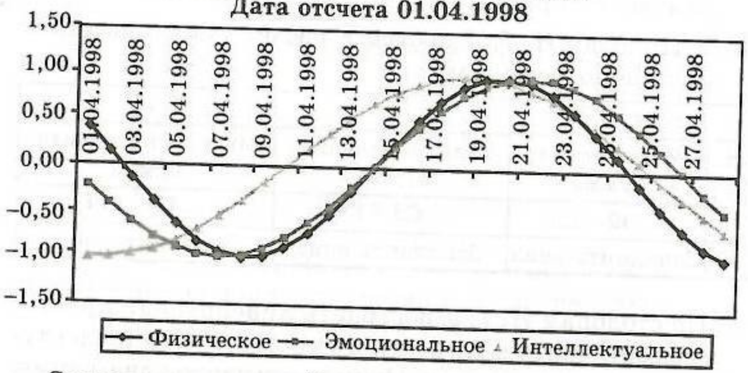
	A	*B*	*C*	*D*
1	Биоритмы			
2				
3	Исходные данные			
4	Дата рождения	06.03.1984		
5	Дата отсчета	01.04.1998		
6	Длительность прогноза	30		
7	Результаты			
8	Порядковый номер	Физическое	Эмоциональное	Интеллектуальное
9	Формула 1	Формула 3	Формула 4	Формула 5
10	Формула 2	Заполнить вниз		
11	Заполнить			

Сравните результаты, полученные после ввода формул, с результатами, приведенными в примере расчета.

8	Порядковый день	Физическое	Эмоциональное	Интеллектуальное
9	01.04.1998	0,40	−0,22	−0,99
10	02.04.1998	0,14	−0,43	−1,00
11	03.04.1998	−0,14	−0,62	−0,97

Постройте диаграмму (график) и сравните ее с нижеследующей:

Биоритмы. Дата рожд. 06.03.1984
Дата отсчета 01.04.1998



Совпадение значений с контрольным образцом показывает правильность введения формул.

<u>Расчет биоритмов реального человека</u>

1. Введите в ячейку B4 дату рождения конкретного человека (себя), а в ячейку B5 — дату отсчета биоритма.
2. Проследите пересчет значений и изменения на диаграмме.
3. Определите благоприятные и неблагоприятные дни для данного человека.
4. Сохраните выполненную работу в файле Биоритмы на Рабочем столе.

<u>Определение совместимости людей по биоритмам</u>

Когда у двух людей совпадают или очень близки графики по одному, двум или даже всем трем биоритмам, то можно предположить довольно высокую совместимость этих людей.

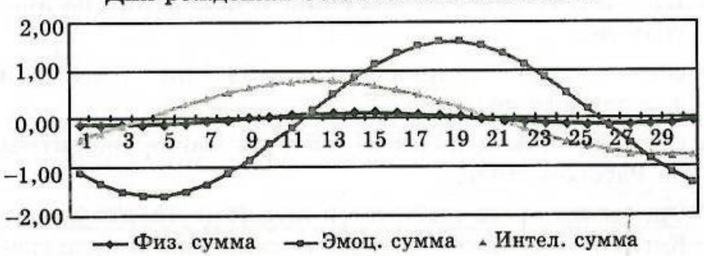
Построим модель физической, эмоциональной и интеллектуальной совместимости двух друзей. Для этого выполните следующие действия:

1. Открыть файл Биоритмы.
2. Выделить ранее рассчитанные столбцы своих биоритмов, скопировать их и вставить в столбцы E, F, G, используя команду Специальная вставка — Только значения.
3. Ввести в ячейку $D4$ дату рождения друга. Модель мгновенно просчитается для новых данных.
4. В столбцах H, I, J провести расчет суммарных биоритмов по формулам.

	H	*I*	*J*
8	Физическая сумма	Эмоциональная сумма	Интеллектуальная сумма
9	= B9 + E9	= C9 + F9	= D9 + G9
10	Заполнить вниз	Заполнить вниз	Заполнить вниз

5. По столбцам H, I, J построить линейную диаграмму (график) физической, эмоциональной и интеллектуальной совместимости. Пример суммарной диаграммы представлен ниже. Максимальные значения по оси $У$ на диаграмме указывают степень совместимости: если размер по $У$ превышает 1,5, то вы с другом в хорошем контакте.

Суммарные биоритмы
Дни рождения: 06.03.1984 и 11.10.1984



10. Валеологическая оценка биоритмологического типа организации нервной системы.

Определить тип биоритмологической организации нервной системы при помощи регистрации частоты сердечной деятельности (ЧСС).

Ход работы:

1. Проводим исследование на себе, определяя и фиксируя в протоколе величины ЧСС.
2. Выбираем любые 10 дней с относительно равномерной загруженностью (отсутствие праздников, соревнований, экзаменов).
3. В выбранные дни, начиная с понедельника, ежедневно в 8, 12, 16, 20 и 24 часа подсчитываем ЧСС за 1 минуту.
4. Подсчет ЧСС проводим в положении сидя после 5 мин отдыха.
5. Результат заносим в нижеприведенную таблицу.

ЧСС за 1 минуту
ФИО — Гилярова Марина Геннадьевна в суточном и недельном циклах в период с 7 ноября 2005 г. по 16 ноября 2005 г.

Дни недели	Время наблюдения					Средний показатель за день
	8	12	16	20	24	
Понедельник	64	62	66	68	68	65,6
Вторник	64	64	70	72	70	68
Среда	63	66	68	78	74	69,8
Четверг	66	70	72	80	70	71,6
Пятница	66	68	72	75	72	70,6
Суббота	64	70	74	76	72	71,2
Воскресенье	65	68	70	75	73	70,2
Понедельник	63	67	69	74	71	68,8
Вторник	65	70	72	73	70	70

Среда	68	69	70	74	69	70
Ср. показатель за час	64,8	67,4	70,3	74,5	70,9	69,58

6. После заполнения таблицы рассчитываем средние показатели ЧСС за каждый день (правая крайняя графа) и за каждый час (нижняя сторона таблицы).

7. По полученным данным строим два графика: А и Б.

На графике А на горизонтальной оси откладывается время регистрации величины ЧСС: 8, 12, 16, 20 и 24 часа. На вертикальной оси откладываются средние показатели ЧСС за час. На графике Б по горизонтальной оси отмечаются дни регистрации ЧСС: 1, 2, 3 ... 10. На оси ординат — средние показатели ЧСС за каждый день.

График А
Средний показатель за час

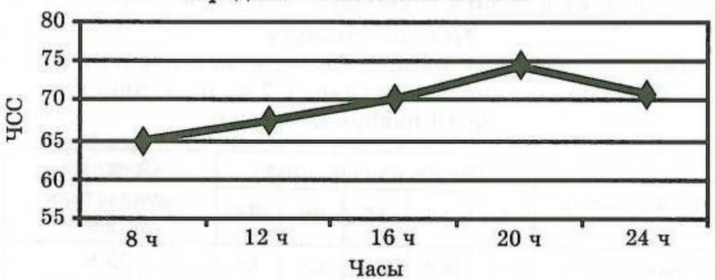
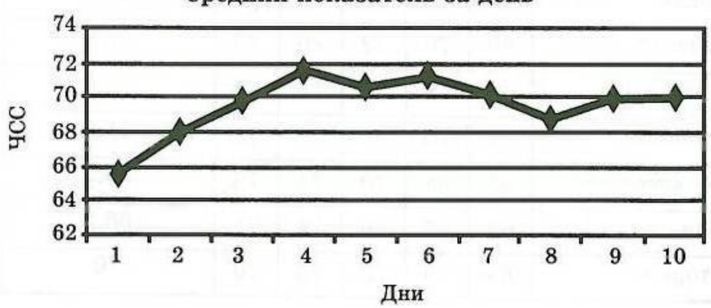


График Б
Средний показатель за день



8. Проводим анализ динамики средних показателей ЧСС в течение всех дней наблюдений и делаем вывод о типе биоритмической организации нервной системы «Сова», «Жаворонок» или «Средний тип».

ВЫВОД: Для «Совы» характерно постепенное возрастание показателя ЧСС в течение дня с 8 до 24 ч (график А). Для «Жаворонка», наоборот, характерно снижение среднего значения ЧСС к концу дня. Для «Среднего типа» характерным является минимальное изменение показателя ЧСС в течение дня с некоторой тенденций его снижения к 16 ч. Следовательно, тип биоритмической организации нервной системы данного человека — «Сова».

Повышение среднего дневного значения ЧСС на графике Б свидетельствует об увеличении напряжения в сердечно-сосудистой системе, а снижение — об уменьшении напряжения. Изменение ЧСС для данного человека, видимо, связано с родом его деятельности.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1
Справочные материалы

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bc + c = 0;$$
$$D = b^2 - 4ac.$$

1) $D > 0$ — уравнение имеет два корня

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

2) $D < 0$ — уравнение не имеет корней;
3) $D = 0$ — уравнение имеет один корень.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Теорема Виета.

Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Разложение на множители

$$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 -- корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

Пропорции

Пропорция: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, или $a : b = c : d$.

Основное свойство пропорции: $a \cdot d = c \cdot b$

Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следуют равенства:

$$a = \frac{bc}{d};$$
$$b = \frac{ad}{c};$$
$$c = \frac{ad}{b};$$
$$d = \frac{bc}{a}.$$

Пропорции, образованные из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c};$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d};$$
$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d};$$
$$\frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}.$$

Основные правила дифференцирования

Производная от суммы двух или нескольких функций:

$(u + v - w + \ldots + t)' = u' + v' - w' + \ldots + t'$;

Производная от произведения двух функций:

$$(uv)' = uv' + u'v;$$

Производная функции с постоянным множителем:

$$(cv)' = cu';$$

Производная дроби:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2};$$

Производная функции от функции (сложной функции):

$$y = f(u), \quad u = \phi(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \phi'(x).$$

Производные элементарных функций:

$(x^n)' = nx^{n-1};$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2};$

$x' = 1;$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

$(c)' = 0;$

$(a^x)' = a^x \ln a;$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};$

$(e^x)' = e^x;$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\mathrm{tg}\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

$(\mathrm{ctg}\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$(\mathrm{arctg}\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

$(\mathrm{arcctg}\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Таблица неопределенных интегралов

1) $\int 0 dx = C;$

2) $\int C dx = Cx + C;$

3) $\int dx/\sqrt{X} = 2\sqrt{X} + C;$

4) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1;$

5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

6) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

9) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C;$

10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\ x + C;$

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

12) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\ x + C;$

13) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$

14) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

15) $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C;$

16) $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a} + C.$

14. Зак. 475

Значение некоторых углов тригонометрических функций

α в град.	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
α в рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	0
ctg α	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	—

Приложение 2
Примерные темы рефератов для самостоятельной работы студентов

1. Роль и место математики в современном мире.
2. Вычисление дифференциала. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям значений функции.
3. Применение определенного интеграла к вычислению различных величин.
4. Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике.
5. Применение статистических методов в социально-гигиенических и медико-биологических исследованиях.
6. Практическое применение статистических показателей для вычисления показателей здоровья населения и деятельности ЛПУ (ФАП).
7. Анализ статистических показателей оценки деятельности поликлиники и стационара.
8. Газообмен в легких. Жизненная емкость легких. Показатели сердечной деятельности.
9. Оценка пропорциональности развития ребенка (расчет прибавки роста, массы, питания детей, антропометрические индексы).
10. Санитарная (медицинская) статистика — отрасль статистической науки.
11. Перепись населения.
12. Национальный проект «Здоровье».
13. Демографическая ситуация в стране и мире.
14. Использование математики в профессиональной деятельности медицинских работников среднего звена.
15. Математическая статистика и ее роль в медицине и здравоохранении.

Требования к оформлению реферативного сообщения

- Структура сообщения должна включать: название, план, текст, список использованной литературы.
- Объем сообщения должен составлять не менее 10 страниц формата А4, аккуратно написанных от руки, или 7 листов формата А4, набранных на компьютере и отпечатанных.
- План сообщения должен отражать суть темы и позволять раскрыть полностью ее содержание.
- Список использованной литературы должен включать не менее трех источников.
- Титульный лист реферативного сообщения должен быть оформлен стандартно.

Приложение 3
Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1) Найдите производную функции в точке $x = 1$:

$$y = \frac{6}{x^5} - 3x^3 + 8\sqrt{x}.$$

2) Вычислите интеграл:

$$\int_{-1}^{4} (3x^2 - 4x + 1)dx.$$

3) Решите задачу:

Сколько воды нужно взять, чтобы из 30 г соды получился 20%-ный раствор?

4) Решите задачу:

Из партии в 1000 шприцов 43 оказались бракованными. Найдите вероятность появления нормальных изделий.

5) Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 6$ и запишите ее основные свойства.

6) Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$.

7) Определите математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

X	2	5	8
P	0,2	0,3	0,5

8) Определите концентрацию раствора в соотношении, если процентная концентрация составляет 0,5%.

9) Определите ЖЕЛ для мужчины 30 лет ростом 180 см.

10) Вычислите массу семимесячного ребенка, если он родился с весом 3,5 кг.

Вариант 2

1) Найдите производную функции в точке $x = 1$:

$$y = \frac{12}{x^5} - 7x^3 + 5\sqrt{x}.$$

2) Вычислите интеграл:

$$\int_{-1}^{3} (x^3 - 2x + 5)dx.$$

3) Решите задачу:

Сколько воды нужно взять, чтобы из 40 г соли получился 15%-ный раствор?

4) Решите задачу:

Из 100 человек, пришедших на прием к терапевту, 15 имели пониженное давление, 43 — нормальное, у остальных было повышенное давление. Какова вероятность того, что человек, пришедший к терапевту, имеет повышенное давление?

5) Постройте график функции $y = x^2 - 2x + 3$ и запишите ее основные свойства.

6) Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 11} \frac{x^2 - 121}{x - 11}$.

7) Определите математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,4	0,5

8) Определите концентрацию раствора в соотношении, если процентная концентрация составляет 2,5%.

9) Определите ЖЕЛ для женщины 35 лет ростом 160 см.

10) Вычислите массу шестимесячного ребенка, если он родился с весом 3,2 кг.

Приложение 4
Тест-контроль

1. Установите соответствие между функциями и их производными.

1. $f(x) = 6 + \cos x$;	A) $f'(x) = \sin x$;
2. $f(x) = 6x + \cos x$;	B) $f'(x) = 6 - \sin x$;
3. $f(x) = 6 - \cos x$;	C) $f'(x) = -\sin x$.

2. Вторая производная $y''(x)$ функции $y(x) = 7 + 5x - x^2$ имеет вид:
1) $y'' = -2$; 2) $y'' = 5 - 2x$;
3) $y'' = 11$; 4) $y'' = 0$.

3. Дифференциал функции $y = 2x^3 + 7x$ имеет вид:
1) $6x^2dx$; 2) $(2x^3 + 7x)dx$;
3) $(4x^2 + 7)dx$; 4) $(6x^2 + 7)dx$.

4. Приближенное значение приращения функции $y = 2x^2 - 5x - 3$, вычисленное с помощью дифференциала в точке $x_0 = 3$ при $\Delta x = 0,02$, равно:
1) 0,02; 2) $-$ 0,14; 3) 0,14; 4) 0.

5. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 5 - 6x + 2x^2$ в точке $x_0 = 3$ равен:
1) 5; 2) 11; 3) -6; 4) 6.

6. Дана функция $y = 2x^4 - x^3 - 2$. Установите соответствие между производными функции в соответствующих точках и их значениями.

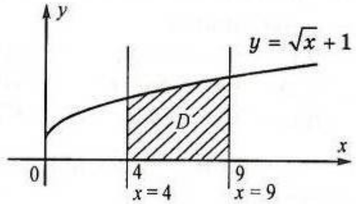
1. $y'(-1)$;	A) -11;
2. $y'(0)$;	B) 5;
3. $y'(1)$;	C) 0.

7. Множество всех первообразных функции $y = 2e^x$ имеет вид:
1) e^x; 2) $2e^x$;
3) $\frac{1}{2}e^x + c$; 4) $2e^x + C$.

8. Определенный интеграл $\int_0^6 \frac{1}{2}x^2dx$ равен:

1) 16; 2) $\frac{x^3}{6}$; 3) 36; 4) 6.

9. Площадь криволинейной трапеции D определяется интегралом:



1) $\int\limits_4^9 \sqrt{x}dx$;

2) $\int\limits_4^9 \left(\sqrt{x}+1\right)dx$;

3) $\int\limits_0^4 \left(\sqrt{x}+1\right)dx$;

4) $\int\limits_9^4 \left(\sqrt{x}+1\right)dx$.

10. Если скорость материальной точки, движущейся прямолинейно, равна $v(t) = 5t - 4$, тогда путь S, пройденный точкой за время $t = 2$ от начала движения, равен:

1) 5; 2) 20; 3) 2; 4) 18.

11. В результате подстановки $t = 1 - 12x$ интеграл $\int (1-12x)^5\, dx$ приводится к виду:

1) $-12\int t^5 dt$; 2) $-\frac{1}{12}\int t^5 dt$;

3) $\int t^5 dx$; 4) $\int t^5 dt$.

12. Используя свойства определенного интеграла, интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos x + 9\sin x)dx$ можно привести к виду:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sin x dx$;

2) $9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos x + \sin x)dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} (x\cos x + 9\sin x)dx$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx + 9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

13. Выберите утверждение о числовых множествах, которое является истинным:

1) Множество иррациональных чисел является подмножеством множества целых чисел.

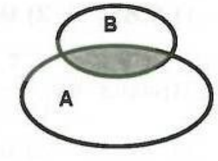
2) Промежуток $(-14;\ 3]$ является подмножеством отрезка $[-15;\ 0]$.

3) Множество действительных чисел является подмножеством множества иррациональных чисел.

4) Интервал $(-12;\ 13)$ является подмножеством отрезка $[-13;\ 15]$.

14. Даны два множества A и B.

Серым цветом выделено:



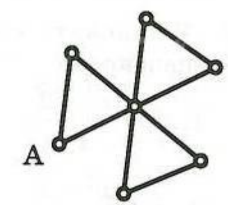
1) разность множеств B и A;

2) пересечение множеств A и B;

3) разность множеств A и B;

4) объединение множеств A и B.

15. Степень вершины A равна:



1) 0;

2) 2;

3) 3;

4) 1.

16. Расположите заданные множества в порядке возрастания количества их элементов:

1) множество целых чисел;

2) $\{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$;

3) пустое множество;

4) $\{x \in N,\ 40 \leqslant x \leqslant 44\}$.

17. Из 25 учащихся в классе 20 сделали прививки. Наудачу выбирают ученика. Тогда вероятность, что выбрали ученика, которому была сделана прививка, равна:
1) 0,5; 2) 0,8; 3) 0,08; 4) 0,2.

18. Из 400 зарегистрированных браков 50 распадаются в течение первого года. Относительная частота расторжения брака в течение первого года равна:
1) 0,875; 2) 0,75;
3) 0,25; 4) 0,125.

19. По данному распределению выборки

x_i	1	2	5
n_i	5	1	4

значение выборочной средней равно:
1) 3,5; 2) 2,7; 3) 3; 4) 3,2.

20. Вероятность появления одного из двух несовместных событий A и B (безразлично какого), вероятности которых соответственно $P(A) = 0,1$ и $P(B) = 0,8$, равна:
1) 0,8; 2) 0,45; 3) 0,1; 4) 0,9.

21. Предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{2-x}$ равен:
1) −1; 2) 0; 3) 1; 4) 2.

22. Установите соответствие между пределами и их значениями.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{x^2}$; A) 1;

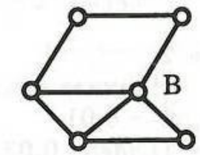
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{x}$; B) 0;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+2}$; C) ∞.

23. Значение предела $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(4+x)(x-1)}{x^2-1}$ равно:
1) ∞; 2) 2,5; 3) 0; 4) −2,5.

24. Значение предела $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ равно:
1) $\dfrac{1}{3}$; 2) 3; 3) 1; 4) 0.

25. Количество ребер графа, инцидентных вершине B, равно:



1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

26. Значение, равное 6, имеют два из приведенных ниже пределов:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-6x^2}{3+x-12x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-x+1}{x^3+2x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x^3}{x^3-2x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x-24}{3+2x}$.

27. Два предела, значения которых равны 6:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x}{\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6x}$.

28. Производная функции $y = e^x \cdot \ln x$ имеет вид:

1) $y' = e^x + \dfrac{1}{x}$; 2) $y' = e^x \cdot \dfrac{1}{x}$;

3) $y' = e^x \cdot \ln x - e^x \cdot \dfrac{1}{x}$; 4) $y' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \dfrac{1}{x}$.

29. Вторая производная функции $f(x) = 5x + x^2$ равна:
1) $5 + 2x$; 2) 2; 3) $7x$; 4) 5.

30. Интеграл $\int\limits_0^2 (2+3x^2)\,dx$ равен:
1) 4; 2) 12; 3) 0; 4) 14.

Приложение 5
Задачи для любителей математики

№ 1.

Найдите производную функции $y = (2 - x)/\ln x$.

Ответ: $(x - 2 - x\ln x) / [x (\ln x)^2]$.

№ 2.

Найдите приращение Δy функции $y = x^2$, если $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$.

Ответ: 0,0399.

№ 3.

Найдите неопределенный интеграл

$\int\left(3 + \cos x - 2e^{2x}\right)dx$.

Ответ: $3x - \sin x - e^{2x}$.

№ 4.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$, $y = x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 1$.

Ответ: 5/3.

№ 5.

Зарплату медсестры повысили на 10%, а затем через год еще на 20%. На сколько процентов повысилась зарплата медсестры по сравнению с первоначальной?

Ответ: на 32%.

№ 6.

Половина от половины числа равна половине. Какое это число?

Ответ: 2.

№ 7.

Решите пропорцию $(4 - x) : 1{,}2 = 5 : (x + 3)$.

Ответ: -2; 3.

№ 8.

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(2x^2 + 5x - 7\right)}{\left(3x^2 - x - 2\right)}$.

Ответ: 9/5.

№ 9.

Чтобы определить, какой цвет волос встречается в городе чаще, а какой реже, студенты за полчаса провели следующий эксперимент. Каждый выбрал свой маршрут и записывал по пути следования цвет волос каждого пятого встречного. Результаты были занесены в следующую таблицу:

Цвет волос	Брюнеты	Шатены	Рыжие	Блондины	Всего
Число людей	198	372	83	212	865

Оцените вероятность того, что выбранный наугад житель этого города будет: а) шатеном, б) рыжим, в) не рыжим. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: а) 0,43; б) 0,10; в) 0,90.

№ 10.

Проведены измерения вязкости крови у 9 больных. Значения относительной вязкости крови у больных составили: 5, 4, 3, 2, 6, 3, 4, 8, 10. Найдите математическое ожидание и дисперсию для данной выборочной совокупности.

Ответ: $M(X) = 5$; $D(X) = 3{,}219$.

№ 11.

Имеется 735 г 16%-ного раствора йода в спирте. Нужно получить 10%-ный раствор йода. Сколько граммов спирта нужно долить для этого к уже имеющемуся раствору?

Ответ: 441 г.

№ 12.

Медицинский халат сначала подорожал на 10%, а затем подешевел на 10%. Как изменилась цена халата?

Ответ: Подешевел на 1%.

№ 13.

Сосчитано, что на голове у человека в среднем 150 000 волос. Определено также, что их в среднем выпадает в месяц 3000. Вычислите, сколько времени в среднем держится на голове каждый волос?

Ответ: Долговечность человеческого волоса 4 с небольшим года.

№ 14.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.

Ответ: 4,5.

№ 15.

Запишите число 24 тремя одинаковыми цифрами. Например, 8 + 8 + 8. Задача имеет не одно решение.

Ответ: $22 + 2$; $3^3 - 3$.

Приложение 6
Контрольные вопросы для зачета

1. Что такое функция? Перечислите основные свойства функций.
2. Какие виды элементарных функций вы знаете? Дайте им определение.
3. Что такое приращение аргумента? Приращение функции? Применение производной?
4. Что такое производная? В чем геометрический и механический смысл производной?
5. Перечислите производные основных элементарных функций.
6. Что такое дифференцирование функции? Перечислите основные правила дифференцирования.
7. Дайте определение дифференциала. Объясните его применение к приближенным вычислениям.
8. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$? Перечислите свойства первообразной. Чем отличаются друг от друга различные первообразные функции для данной функции $f(x)$?
9. Дайте определение неопределенного интеграла. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
10. Какое действие называется интегрированием? Как проверить результат интегрирования? Чему равна производная от неопределенного интеграла?
11. Перечислите методы интегрирования. Перечислите основные табличные неопределенные интегралы.
12. Дайте определение криволинейной трапеции, определенного интеграла. Перечислите свойства определенного интеграла.
13. Сформулируйте теорему Ньютона — Лейбница. В чем сходство и различие неопределенного и определенного интегралов?

14. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла (составьте словесный алгоритм)?
15. Перечислите области применения интеграла, назовите величины, которые можно вычислить с помощью интеграла.
16. Что такое предел? Перечислите основные теоремы о пределах. Назовите основные приемы вычисления пределов функций.
17. Что такое граф в теории графов? Виды графов? Элементы графа?
18. Объясните понятия случайного события, частоты случайного события, достоверности, невозможности, равносильности, несовместности, противоположности событий.
19. Дайте определение вероятности случайного события. Запишите формулу. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей, запишите их формулами.
20. Что такое закон распределения случайной величины? Объясните принцип его составления.
21. Дайте определение основным характеристикам дискретной случайной величины (математическое ожидание, дисперсия). Запишите формулы.
22. Дайте определение статистики. Перечислите задачи статистики.
23. Что такое статистическая совокупность? Единицы ее измерения? Учетные признаки?
24. Перечислите этапы статистического исследования. Дайте краткую характеристику каждому этапу статистического исследования.
25. Чем отличается генеральная совокупность от выборочной?
26. Что такое полигон? Что такое гистограмма? Чем они отличаются и в чем их сходство?

27. Перечислите основные показатели выборки. Дайте им определение.
28. Что такое вариационный ряд? Что такое статистический ряд?
29. Дайте определение выборочных характеристик: математического ожидания и дисперсии. Запишите несколько различных формул для их нахождения.
30. Что такое санитарная статистика? Перечислите задачи санитарной статистики. Перечислите основные разделы санитарной статистики.
31. Перечислите основные медико-демографические показатели. Как вычисляются показатели рождаемости и смертности, естественный прирост?
32. Что такое дискретная случайная величина и непрерывная случайная величина?
33. В чем заключается выборочный метод обработки статистических данных? Что является источниками данных санитарной статистики?
34. Перечислите основные показатели, определяющие деятельность ЛПУ и ФАП.
35. Каким образом осуществляется статистика населения? Всероссийская перепись населения и работа с ее показателями.
36. Дайте определение пропорции, основного свойства пропорции. Что такое процент? Задачи на проценты.
37. Что такое логика? Основные понятия логики (понятие, высказывание или суждение, умозаключение), их определения.
38. Алгебра высказываний. Таблица истинности.
39. Конъюнкция, дизъюнкция, инверсия.
40. Что такое комбинаторика? Дайте определения базовым понятиям комбинаторики (перестановки, размещения, сочетания) и запишите их формулы.

41. Приведите примеры применения математических методов в медицине.

42. Перечислите меры объема. Запишите формулы для расчета прибавки роста и массы детей.

43. Объясните понятия: жизненная емкость легких, минутный объем дыхания, ударный и минутный объемы крови.

44. По каким формулам рассчитывается количество молока для ребенка объемным и калорийным методами?

45. Оценка пропорциональности развития ребенка. Антропометрические индексы.

Приложение 7
Высказывания великих людей о математике

- Книга природы написана на языке математики.

(Г. Галилей)

- Математика — царица наук, арифметика – царица математики.

(К.Ф. Гаусс)

- Кто с детских лет занимается математикой, тот развивает внимание, тренирует свой мозг, свою волю, воспитывает настойчивость и упорство в достижении цели.

(А. Маркушевич)

- «Числа управляют миром», – говорили пифагорейцы. Но числа дают возможность человеку управлять миром, и в этом нас убеждает весь ход развития науки и техники наших дней.

(А. Дородницын)

- Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле.

(А.Н. Крылов)

- Если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе.

(М.И. Калинин)

- Есть одна наука, без которой невозможна никакая другая. Это математика. Ее понятия, представления и символы служат тем языком, на котором говорят, пишут и думают другие науки. Она объясняет закономерности сложных явлений, сводя их к простым, элементарным явлениям природы. Она предсказывает и предвычисляет далеко вперед с огромной точностью ход вещей.

(С. Л. Соболев)

- Разве ты не заметил, что способный к математике изощрен во всех науках в природе?

(Платон)

- Было бы хорошо, если бы эти знания требовало само государство и если бы лиц, занимающих высшие государственные должности, приучали заниматься математикой и в нужных случаях к ней обращаться.

(Платон)

- Науки математические с самой глубокой древности обращали на себя особенное внимание, в настоящее время они получили еще больше интереса по влиянию своему на искусство и промышленность.

(П.Л. Чебышев)

- Математика есть лучшее и даже единственное введение в изучение природы.

(Д.И. Писарев)

- Астрономия (как наука) стала существовать с тех пор, как она соединилась с математикой.

(А.И. Герцен)

- Полет — это математика.

(В. Чкалов)

- Вдохновение нужно в геометрии не меньше, чем в поэзии.

(А.С. Пушкин)

- Геометрия полна приключений, потому что за каждой задачей скрывается приключение мысли. Решить задачу — это значит пережить приключение.

(В. Произволов)

- В математике есть своя красота, как в живописи и поэзии.

(Н.Е. Жуковский)

- Химия — правая рука физики, математика — ее глаз.

(М.В. Ломоносов)

- Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит.

(М.В. Ломоносов)

- Я люблю математику не только потому, что она находит применение в технике, но и потому, что она красива.

(Р. Петер)

- Все, что до этого было в науках: гидравлика, аэрометрия, оптика и других, — темно, сомнительно и недостоверно, математика сделала ясным, верным и очевидным.

(М.В. Ломоносов)

- Стремящийся к ближайшему изучению химии должен быть сведущ и в математике.

(М.В. Ломоносов)

- Слеп физик без математики.

(М.В. Ломоносов)

- Математик, который не является в известной мере поэтом, никогда не будет настоящим математиком.

(К. Вейерштрасс)

- Математика — это язык, на котором говорят все точные науки.

(Н.И. Лобачевский)

- Только с алгеброй начинается строгое математическое учение.

(Н.И. Лобачевский)

- Как бы машина хорошо ни работала, она может решать все требуемые от нее задачи, но она никогда не придумает ни одной.

(А. Эйнштейн)

- Именно математика дает надежнейшие правила: кто им следует — тому не опасен обман чувств.

(Л. Эйлер)

- Цифры (числа) не управляют миром, но они показывают, как управляется мир.

(И. Гёте)

- Пристальное, глубокое изучение природы есть источник самых плодотворных открытий математики.

(Ж. Фурье)

- Было бы легче остановить Солнце, легче было сдвинуть Землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расхождение.

(В.Ф. Каган)

- Счет и вычисления — основа порядка в голове.

(Песталоцци)

- Величие человека — в его способности мыслить.

(Б. Паскаль)

- Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их.

(Д. Пойа)

- Чтобы переварить знания, надо поглощать их с аппетитом.

(А. Франц)

- Предмет математики столь серьезен, что не следует упускать ни одной возможности сделать его более занимательным.

(Б. Паскаль)

- Удачная математическая шутка лучше, чем дюжина заурядных работ; она является одновременно и лучшей математикой.

(Дж. Литлвуд)

- Если теорему так и не смогли доказать, она становится аксиомой.

(Евклид)

- Логика — это искусство ошибаться с уверенностью в своей правоте.

(Дж. Кратч)

- Когда разговариваешь с математиком, можно не иметь представления о математике. Но при этом совершенно необходимо чувство юмора и сознание своего ничтожества...

(К. Дзевановский)

- Человек есть дробь. Числитель — это сравнительно с другими — достоинства человека; знаменатель — это оценка человеком самого себя. Увеличить свой числитель — свои достоинства — не во власти человека, но всякий может уменьшить себе знаменатель, тем самым приблизиться совершенству.

(Л.Н. Толстой)

- Подобно тому, как все искусства тяготеют к музыке, все науки стремятся к математике.

(Дж. Сантаяна)

- В математике нет символов для неясных мыслей.

(Анри Пуанкаре)

- Давида Гильберта спросили об одном из его бывших учеников. «А, такой-то? — вспомнил Гильберт. — Он стал поэтом. Для математики у него было слишком мало воображения».

(В. Хмурый)

- В каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики.

(И. Кант)

- Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества.

(Р. Бэкон)

- Симметрия является той идеей, с помощью которой человек веками пытается объяснить и создать порядок, красоту и совершенство.

(Г. Вейль)

- Мало иметь хороший ум, главное — хорошо его применять.

(Р. Декарт)

- Часто говорят, что цифры управляют миром; по крайней мере нет сомнения в том, что цифры показывают, как он управляется.

(И. Гёте)

- Нельзя быть настоящим математиком, не будучи немного поэтом.

(Т. Вейерштрасс)

- Аксиома — это истина, на которую не хватило доказательств.

(В. Хмурый)

- Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать.

(Г. Галилей)

- Многие, которым никогда не представлялось случая более глубоко узнать математику, смешивают ее с арифметикой и считают наукой сухой. В сущности же это наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего столетия говорит совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи в то же время поэтом в душе. Только, разумеется, чтобы понять верность этого определения, надо отказаться от предрассудка, что поэт должен сочинять несуществующее, что фантазия и вымысел — одно и то же. Мне кажется, что поэт должен только видеть то, что не видят другие, видеть глубже других.

(С.В. Ковалевская)

- Пока алгебра и геометрия развивались врозь, их прогресс был медленным, применение — ограниченным; когда же эти две науки были соединены, они стали помогать друг другу и быстро шагать к совершенству.

(Лагранж)

- Математика — тоже язык.

(Д. Гиббс)

- Между духом и материей посредничает математика.

(Ш. Гуго)

- Математика представляет искуснейшие изобретения, способные удовлетворить любознательность, облегчить ремесла и уменьшить труд людей.

(Р. Декарт)

- Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой.

(Б. Рассел)

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Башмаков М.И.* Алгебра и начала анализа. М.: Дрофа, 2002.
2. Большая школьная энциклопедия / под ред. С. Исмаилова. М.: Русское энциклопедическое товарищество, 2003.
3. *Гмурман В.Е.* Теория вероятности и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1992.
4. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов / В.С. Шипачев. 5-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2005.
5. Информатика. Задачник-практикум: в 2 т. / под ред. И.Г. Семакина, Е.К. Хеннераю. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. Т. 2.
6. Информатика. Практикум-задачник по моделированию / под ред. Н.В. Макаровой. СПб.: Питер, 2003.
7. *Киселева Л.В.* Пособие по математике для студентов медицинских училищ и колледжей. М.: ФГОУ «ВУНМЦ Росздрава», 2005.
8. *Колмогоров А.Н.* Алгебра и начала анализа. М.: Просвещение, 2002.
9. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1999.
10. Национальное аккредитационное агентство в сфере образования // *www.fepo.ru*

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

11. *Букатин А.В.* Физическая культура с основами валеологии: метод. пособие, ГОУЗ ВМК № 1. Волгоград, 2002.

12. *Войнов В.Б., Воронова Н.В., Золотухин В.В.* Методы оценки состояния систем кислородообеспечения организма человека. Ростов н/Д, 2000.
13. *Данилова Н.Н.* Психофизиологическая диагностика функциональных состояний. М., 1999.
14. *Елисеева И.И., Юзбяшев М.М.* Общая теория статистики. М.: Финансы и статистика, 2004.
15. *Загрядский В.П., Сулимо-Самуйло З.К.* Методы исследований в физиологии труда. Л., 1996.
16. *Лурье И.А.* Методические рекомендации по математике. М.: Высш. шк., 1996.
17. *Нахимсов Л.М.* Элементы интегрального исчисления. М.: Высш. шк., 1990.
18. Практикум по физиологии труда / под. ред. А.С. Батуева. Л., 1997.
19. *Орлов В.Н.* Руководство по электрокардиографии. М., 2000.
20. *Сумароков А.В., Михайлов А.А.* Клиническая электрокардиография. М., 2002.
21. Экология здравоохранения: учеб. пособие / под общ. ред. А.В. Решетникого. М.: ГЭОТАР-МЕД, 2003.
22. Экономика здравоохранения: учеб. пособие / Р.С. Гаджиев. М.: Медицина, 2003.
23. http://ru.wikipedia.org/wiki — Википедия — свободная энциклопедия.

Все отзывы, замечания и предложения
просьба отправлять по адресу:

marina_gilyarova@mail.ru

Учебное издание

Гилярова Марина Геннадьевна

МАТЕМАТИКА ДЛЯ МЕДИЦИНСКИХ КОЛЛЕДЖЕЙ

Ответственный редактор С.А. Осташов
Технический редактор Л.А. Багрянцева

Подписано в печать 20.07.14.
Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. п. л. 23.52
Тираж 2500 экз. Зак. № 475.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-75
Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57

Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.

ФЕНИКС

ISBN 978-5-222-23308-5